1.5) - DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE -

DEFINIZIONE 1.5.1 (di dipendenza ed indipendenza lineare)

Un sistema $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è detto <u>linearmente dipendente</u> oppure <u>legato</u> se esiste un sistema di scalari $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ <u>non tutti nulli</u> tali che

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

In questo caso si dirà pure che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono <u>linearmente dipendenti</u>.

Viceversa, il sistema S è detto <u>linearmente indipendente</u> oppure <u>libero</u> se la relazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

<u>implica</u> $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. In questo caso si dirà pure che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono <u>linearmente indipendenti</u>. ■

Dimostriamo adesso le proprietà salienti dei sistemi legati.

PROPOSIZIONE 1.5.1 (Condizione sufficiente di dipendenza lineare)

Se un vettore di un sistema di vettori di V è nullo, il sistema è legato.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il sistema $\{\underline{v}_1 = \underline{0}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$

La relazione $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ è soddisfatta per $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$, cioè il sistema $\{\underline{0}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è legato. ∎

Come caso particolare, per $n = 1$, la proposizione precedente implica che il sistema $\{\underline{0}\}$ costituito dal solo vettore nullo è legato.

PROPOSIZIONE 1.5.2 (Condizione necessaria e sufficiente di dipendenza lineare)

Un sistema costituito da più di un vettore di V è linearmente dipendente se e solo se almeno uno dei suoi elementi è combinazione lineare dei rimanenti (o dipende linearmente dai rimanenti).

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo l'implicazione diretta ($\Rightarrow$).
Sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ un sistema legato costituito da più di un vettore di V ($n>1$).
Allora l'equazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

è soddisfatta per almeno un sistema di scalari $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ non tutti nulli.
Senza perdita di generalità, pena la rinumerazione di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, possiamo assumere

$\alpha_1 \neq 0$, allora moltiplicando ambo i membri per lo scalare $\frac{1}{\alpha_1}$ si ha:

$$\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n\right) = \frac{1}{\alpha_1}\underline{0}$$

cioè

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1}\underline{v}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underline{v}_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\underline{v}_n = \underline{0}$$

ovvero

$$\underline{v}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underline{v}_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\underline{v}_n = \underline{0}$$

ed infine per la regola del trasporto:

$$\underline{v}_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\underline{v}_2 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1}\underline{v}_n$$

e la combinazione lineare del secondo membro esiste perché per ipotesi è $n>1$.

Dimostriamo l'implicazione inversa ($\Leftarrow$).

Supponiamo, senza perdita di generalità, dopo una eventuale opportuna rinumerazione degli indici, che sia $\underline{v}_1$ combinazione lineare dei rimanenti $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ elementi del sistema $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, cioè supponiamo che sia

$$\underline{v}_1 = \beta_2\underline{v}_2 + \dots + \beta_n\underline{v}_n$$

con $\beta_2, \dots, \beta_n$ scalari opportuni. Applicando la regola del trasporto si ha:

$$-\underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n = \underline{0} \quad \text{ovvero}$$

$$(-1)\underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n = \underline{0} \quad \text{che}$$

è una combinazione lineare dei vettori $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ uguale al vettore nullo con scalari <u>non</u> tutti nulli $(-1 \neq 0)$ dunque $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti. ∎

PROPOSIZIONE 1.5.3 (monotonia di sistemi legati)

Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è un sistema legato, un qualsiasi sistema che lo contiene è ancora legato.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

L'equazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

per ipotesi è soddisfatta da un sistema $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ di scalari **non** tutti nulli.

Quindi qualunque siano i vettori $\underline{v}_{n+1}, \dots, \underline{v}_m$ l'equazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n + \alpha_{n+1} \underline{v}_{n+1} + \dots + \alpha_m \underline{v}_m = \underline{0}$$

è soddisfatta dal sistema

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m\}$$

di scalari **non** tutti nulli. ■

Dimostriamo adesso le proprietà salienti dei sistemi liberi.

PROPOSIZIONE 1.5.4 (del singleton di $\underline{v}$)

Un sistema di un sol vettore di V diverso dal vettore nullo è libero.

DIMOSTRAZIONE

Tenendo presente la legge di annullamento del prodotto risulta che, per $\underline{v} \neq \underline{0}$, l'equazione $\alpha \underline{v} = \underline{0}$ ha la sola soluzione $\alpha = 0$, cioè il sistema $\{\underline{v} \neq \underline{0}\}$ è libero.

PROPOSIZIONE 1.5.5 (Condizione necessaria di indipendenza lineare)

In un sistema libero nessun vettore è nullo e nessun vettore è uguale ad un altro.

DIMOSTRAZIONE

Questa proposizione è equivalente alla 1.5.1 e 1.5.2. Infatti se per assurdo un vettore di un sistema fosse nullo allora, per la proposizione 1.5.2, il sistema sarebbe legato. Inoltre se per assurdo un vettore di un sistema fosse uguale ad un altro vettore del sistema stesso, vuol dire che uno dei due è combinazione lineare dei rimanenti e, per la proposizione 1.5.2, il sistema sarebbe legato. $\blacksquare$

La seconda parte della proposizione precedente assicura che un sistema libero è un insieme di n vettori di V.

PROPOSIZIONE 1.5.6 (monotonia di sistemi liberi)

Ogni sottosistema di un sistema libero è libero.

DIMOSTRAZIONE

Questa proposizione è equivalente alla 1.5.3. Infatti se per assurdo un sottosistema di un sistema di vettori fosse legato, allora, per la proposizione 1.5.3, il sistema di vettori sarebbe legato. ■

Un importante risultato concernente i sistemi linearmente indipendenti è il seguente.

LEMMA 1.5.1 (di STEINITZ)

Dati due sistemi $S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ e $T = \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m\}$ di ordine rispettivamente n ed m di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Se S è linearmente indipendente ed i suoi elementi dipendono linearmente da quelli di T, cioè $\underline{v}_i \in L(T)$ con $i = 1, \ldots, n$, allora $n \leq m$.

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo esplicitamente che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti e quindi nessuno di essi può essere il vettore nullo e tantomeno può dipendere linearmente dai rimanenti.

Supponiamo, per assurdo, che $n > m$. In virtù della seconda ipotesi su S, esiste una relazione di dipendenza lineare del tipo

$$\underline{v}_1 = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \cdots + \alpha_m \underline{w}_m .$$

Non tutti gli scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ possono

essere scelti, altrimenti si avrebbe $\underline{v}_1 = \underline{0}$.
Senza ledere la generalità, dopo una eventuale opportuna rinumerazione degli elementi $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$, possiamo assumere che sia $\alpha_1 \neq 0$. Possiamo allora ricavare $\underline{w}_1$ ottenendo

$$\underline{w}_1 = \frac{1}{\alpha_1} \underline{v}_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \underline{w}_2 + \dots + \frac{-\alpha_m}{\alpha_1} \underline{w}_m$$

che prova che ogni combinazione lineare di $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ è anche una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$ e dunque, in particolare che gli elementi di S dipendono linearmente da $\underline{v}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$.
L'idea della dimostrazione consiste ora nel proseguire questa procedura sostituendo successivamente $\underline{w}_2, \underline{w}_3 \dots$ con $\underline{v}_2, \underline{v}_3 \dots$ finché tutti gli elementi $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ risultano sostituiti, ottenendo nel contempo che gli elementi di S dipendono linearmente da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$, contro il fatto che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

Procediamo per induzione, assumendo che ci sia un intero positivo r per cui $1 \leq r < m$ e tale che, dopo una eventuale opportuna rinumerazione di $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$, gli elementi di S dipendono linearmente da

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_m .$$

Allora si ha

$$\underline{v}_{r+1} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_r \underline{v}_r + \gamma_{r+1} \underline{w}_{r+1} + \dots + \gamma_m \underline{w}_m .$$

Non può essere $\gamma_i = 0$ per ogni $i = r+1, \dots, m$ perché, altrimenti, otterremmo

$$\underline{v}_{r+1} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_r \underline{v}_r \quad \text{contro}$$

il fatto che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$, e quindi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{r+1}$, sono linearmente indipendenti.

Rinumerando, se necessario, $\underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_m$, senza ledere la generalità possiamo assumere che sia $\gamma_{r+1} \neq 0$. Allora possiamo ricavare $\underline{w}_{r+1}$ ottenendo

$$\underline{w}_{r+1} = \frac{-\beta_1}{\gamma_{r+1}} \underline{v}_1 + \dots + \frac{-\beta_r}{\gamma_{r+1}} \underline{v}_r + \frac{1}{\gamma_{r+1}} \underline{v}_{r+1} + \frac{-\gamma_{r+2}}{\gamma_{r+1}} \underline{w}_{r+2} + \dots + \frac{-\gamma_m}{\gamma_{r+1}} \underline{w}_m$$

che prova che ogni combinazione lineare di

$$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r, \underline{w}_{r+1}, \ldots, \underline{w}_m$$

è anche combinazione lineare di

$$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{r+1}, \underline{w}_{r+2}, \ldots, \underline{w}_m$$

e dunque, in particolare, che gli elementi di S dipendono linearmente da

$$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{r+1}, \underline{w}_{r+2}, \ldots, \underline{w}_m \, .$$

Per induzione su r $(1 \leq r < m)$, quando $r = m-1$, ovvero $r+1 = m$, possiamo concludere che gli elementi di S, cioè $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, dipendono linearmente da $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$, ma abbiamo già osservato che ciò è impossibile, per cui la nostra ipotesi (assurda) $n > m$ è falsa. Allora deve essere necessariamente $n \leq m$. ∎

1.6) - BASE E DIMENSIONE -

I concetti introdotti in questo paragrafo e le conclusioni a cui perverremo, sono di fondamentale importanza per tutta l'algebra lineare. Avvisiamo pure che, d'ora in poi, parleremo semplicemente di spazio vettoriale V, senza specificare il campo ad esso associato.

DEFINIZIONE 1.6.1 (di base)

Chiameremo <u>base</u> di uno spazio vettoriale V un sistema di generatori di V linearmente indipendente - ■

Con tale definizione si ha che se un sistema di vettori è una base di V allora il sistema si riduce ad un insieme. Infatti è stato già fatto notare che in un sistema linearmente indipendente non può esserci ~~costituito~~ alcuna coppia di vettori uguali fra di loro.

PROPOSIZIONE 1.6.1 (Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia una base)

Un sistema di vettori di V, $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V se e solo se ogni vettore $\underline{v}$ di V si può esprimere <u>in un sol modo</u> come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Dimostriamo l'implicazione diretta ($\Rightarrow$).

Supponiamo che $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sia una base di V. Se un vettore $\underline{v}$ di V si potesse esprimere in due modi come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ avremmo

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$$

e

$$\underline{v} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ scalari opportuni. Sottraendo membro a membro si ha allora

$$\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\underline{v}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\underline{v}_n ,$$

ma $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, per ipotesi, sono linearmente indipendenti quindi deve risultare necessariamente $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$ e cioè

$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Ciò vuol dire che l'espressione di $\underline{v}$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ è unica.

Dimostriamo l'implicazione inversa ($\Leftarrow$). Se per ipotesi, ogni vettore di V si esprime in un sol modo come combinazione lineare di vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, allora si ha in primo luogo che il sistema $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ è un sistema di generatori di V. Dimostriamo adesso che esso è linearmente indipendente. All'uopo esprimiamo il vettore nullo come

$$\underline{0} = 0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_n ;$$

allora la relazione

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0} ,$$

tenendo presente che l'espressione di $\underline{0}$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ deve essere, per ipotesi, unica, implica

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0,$$

dunque i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linear= mente indipendenti ed essendo generatori di V ne costituiscono una base. ■

DEFINIZIONE 1.6.2 (Le componenti scalari di un vettore rispetto ad una base)

Se $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ è una base dello spazio vettoriale V, l'espressione

$$\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + \ldots + x_n \underline{e}_n$$

è detta la decomposizione del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$. Gli scalari $x_1, \ldots, x_n$, univocamente deter= minati dal vettore $\underline{v}$, si chiamano le *componenti* o *coordinate* di $\underline{v}$ rispetto alla base $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$. ■

TEOREMA 1.~~6~~.1 (di equicardinalità delle basi)

Sia V uno spazio vettoriale che ammette una base costituita da n elementi ed un'altra base costituita da m elementi. Allora $m = n$

DIMOSTRAZIONE

Applichiamo il Teorema di STEINITZ alle due basi. I vettori della prima base sono ovviamente linearmente indipendenti e dipendono linearmente da quelli della seconda base, quindi per il teorema di steinitz risulta

$$n \leq m$$

Per contro i vettori della seconda base sono ovviamente linearmente indipendenti e dipendono linearmente da quelli della prima base, quindi per il teorema di steinitz risulta anche

$$m \leq n$$

Allora necessariamente si ha $m = n$. ∎

Il teorema precedente dà la possibilità
di definire la nozione di dimensione di uno spazio vettoriale.

DEFINIZIONE 1.63 (di dimensione)

Se uno spazio vettoriale V ammette una base costituita da $n\ (\geq 1)$ elementi allora diciamo che n è la <u>dimensione</u> di V e scriviamo:

$$\dim V = n.$$

Se V contiene solo il vettore nullo, se cioè $V = \{\underline{0}\}$, allora V non ha basi e noi diciamo che V ha <u>dimensione zero</u>, dunque

$$\dim\{\underline{0}\} = 0$$

In tutti gli altri casi, cioè se V non ammette basi finite e non contiene solo il vettore nullo, diciamo che V ha <u>dimensione infinita</u>.

■

Tenendo presente il teorema di equicardinalità delle basi, possiamo dire che la dimensione di uno spazio vettoriale V è il numero di elementi di cui è costituita una qualsiasi sua base.

ESEMPIO 17.1 (dimensione di $\mathbb{R}^n$)

Lo spazio vettoriale delle n-ple ordinate di numeri reali, $\mathbb{R}^n$, ha dimensione n.
Una sua base, infatti è

$$\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$\underline{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\underline{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

perché sono elementi di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti che generano tutto $\mathbb{R}^n$.
Per dimostrare ciò, prendiamo una n-pla ordinata generica $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$.
Si ha, tenendo presente le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare definite in $\mathbb{R}^n$,

$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) =$

$= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1)$

ovvero si ottiene $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)$ che pertanto sono generatori di $\mathbb{R}^n$. Questi poi sono anche linearmente indipendenti, infatti una combinazione lineare di essi eguagliata al vettore nullo $(0,0,\dots,0)$ di $\mathbb{R}^n$, cioè

$\alpha_1(1,0,\dots,0) + \alpha_2(0,1,\dots,0) + \dots + \alpha_n(0,0,\dots,1) = (0,0,\dots,0)$

ovvero

$(\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$

e quindi

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

implica $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

Tale base prende il nome di <u>base canonica</u> di $\mathbb{R}^n$.

Daremo ora dei criteri che ci permettono di dire quando un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V ne costituiscono una base.

Iniziamo con la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.6.4 (di sistema massimale linearmente indipendente)

Diremo che un sistema $S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V ~~se~~ è un <u>sistema massimale linearmente indipendente</u> di V se, quale che sia l'elemento $\underline{w}$ di V, gli elementi $\underline{w}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ risultano linearmente dipendenti. ∎

In altre parole, un sistema di vettori di V è massimale linearmente indipendente se esso non è contenuto propriamente in alcun sistema indipendente di V.

Detto ciò, si ha la seguente caratterizzazione delle basi di V.

TEOREMA 1.6.2 (caratterizzazione delle basi)

Sia $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V non nullo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) S è una base di V

2) S è un sistema massimale linearmente indipendente di V

3) S è un sistema minimale di generatori di V.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo queste equivalenze facendo vedere che 2) ⇒ 1), 1) ⇒ 3) e 3) ⇒ 2)

Primo passo, 2) ⇒ 1)

Dobbiamo dimostrare che il sistema $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, per ipotesi massimale linearmente indipendente (e a fortiori linearmente indipendente) genera V; e cioè che ogni elemento di V può essere espresso come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

Sia all'uopo $\underline{w}$ un elemento arbitrario di V, poiché, per ipotesi, gli elementi $\underline{w}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti, esistono $n+1$ scalari $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che
$$\beta \underline{w} + \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}.$$
Non può essere $\beta = 0$ perché, se così fosse, otterremmo $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ con almeno un $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$, cioè che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ risulterebbero linearmente dipendenti; e ciò è contro l'ipotesi. Dunque si può ricavare $\underline{w}$ e scrivere
$$\underline{w} = \frac{-\alpha_1}{\beta} \underline{v}_1 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\beta} \underline{v}_n$$
che dimostra che $\underline{w}$ è una combinazione lineare di $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e, data l'arbitrarietà di $\underline{w} \in V$, che il sistema S genera lo spazio vettoriale V.

Secondo passo, 1) $\Rightarrow$ 3)

Dobbiamo dimostrare che la base di V, $S=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ è un sistema minimale di generatori di V. Se $n=1$ il sistema S è già minimale. Sia quindi $n>1$. Sappiamo, per la proposizione 2.5.6, che un sottosistema proprio di S è ancora linearmente indipendente. Ora se la base S non fosse un sistema minimale di generatori di V, esisterebbe un sottosistema proprio, di S, linearmente indipendente che genera V; cioè esisterebbe una base di V costituita da un numero di elementi inferiore a quello della base S, contro il teorema di equicardinalità delle basi.

Terzo passo 3) $\Rightarrow$ 2)

Dobbiamo dimostrare che il sistema $S=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ minimale di generatori di V è linearmente indipendente e, poi, che è massimale indipendente. Se $n=1$ allora S non può essere il sistema $\{\underline{0}\}$ altrimenti lo spazio vettoriale V da esso generato

sarebbe nullo, contro l'ipotesi che $V \neq \{\underline{0}\}$.
Dunque in tal caso ($n=1$) S è il sistema $\{\underline{v}\}$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$ e cioè è linearmente indipendente.
Supponiamo, quindi, che $n>1$. Se per assurdo $S=\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ fosse linearmente dipendente allora, per la proposizione 1.5.2, almeno un elemento di esso sarebbe combinazione lineare dei rimanenti. Senza perdita di generalità, dopo l'eventuale opportuna rinumerazione degli elementi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, possiamo assumere che sia $\underline{v}_n$ combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$, cioè

$$\underline{v}_n = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \underline{v}_{n-1}$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ scalari opportuni. Ma ciò direbbe che ogni combinazione lineare di S è anche una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$ e cioè che lo spazio vettoriale V generato da S è incluso nel suo sottospazio generato da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$, ovvero che V è generato dal sottosistema di S, $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}\}$, contro il fatto che S è un sistema minimale di generatori di V.

Ne segue che la nostra ipotesi (assurda) è falsa e che quindi $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è linearmente indipendente. Infine, che S è un sistema massimale linearmente indipendente deriva dal fatto che, essendo S un sistema di generatori di V, qualunque sia il vettore $\underline{w}$ di V risulta $\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$, e cioè che $\forall \underline{w} \in V$ il sistema $\{\underline{w}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è linearmente dipendente. $\blacksquare$

TEOREMA 1.6.3 (della dimensione)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n maggiore di 0 e siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ elementi linearmente indipendenti di V. Allora il sistema $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ è una base di V.

DIMOSTRAZIONE

Dall'ipotesi che $n > 0$ segue che V ammette una base costituita da n vettori $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$. Vogliamo dimostrare che il sistema $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ è indipendente massimale di modo che per il teorema precedente la tesi risulta provata. Se per assurdo $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ non fosse indipendente massimale esisterebbe un $\underline{w} \in V$ tale che $\underline{w}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono ancora linearmente indipendenti, ma essi essendo tutti vettori di V dipendono linearmente dagli n vettori della base $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ e quindi, per il teorema di STEINITZ deve essere $n+1 \leq n$. Assurdo. ∎

COROLLARIO 1.7.1 (della dimensione)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita (anche nulla) e sia W un suo sottospazio. Se $\dim V = \dim W$ allora $V = W$.

DIMOSTRAZIONE

Se $\dim V = \dim W = 0$ allora sia V che W sono lo spazio vettoriale nullo, $\{\underline{0}\}$, e la tesi è verificata.

Sia dunque $n > 0$ la dimensione di W, e quindi $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ una base di W.

E' chiaro che, essendo $W \subseteq V$, i vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ son elementi linearmente indipendenti anche di V, e siccome per ipotesi $n = \dim V$, invocando il teorema della dimensione, possiamo concludere che $V = W$. ∎

COROLLARIO 1.7.2 (della dimensione del sottospazio)

Sia V uno spazio vettoriale avente una base costituita da n elementi. Sia W un sotto=spazio di V non nullo. Allora W ha una base e la sua dimensione non supera n.

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo innanzitutto che le ipotesi implicano che $n > 0$ e che esiste almeno un elemento $\underline{w}_1$ in W non nullo. Dunque $\{\underline{w}_1\}$ è un sistema linearmente indipendente di elementi di W; se esso non è anche massimale possiamo trovare un elemento $\underline{w}_2$ di W tale che $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ risultino linearmente indipendenti. Continuando ad aggiungere in questo modo un elemento per volta, deve esistere un intero positivo $m \leq n$ tale che si siano potuti trovare gli elementi $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$ costituenti un sistema massimale linearmente indipendente di W e quindi, per il teorema 1.6.2, una base di W. Infatti siccome tutti i w_i $(i=1,\dots,m)$ sono anche elementi di V, il teorema della dimensione assicura che non è possibile continuare a trovare indefinitamente elementi linearmente indipendenti dai precedenti, giacché il numero di elementi siffatti che si possono trovare, per il teorema di equicardinalità delle basi, è al massimo n. ∎

TEOREMA 1.6.4 (della base incompleta)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n (>0)$ e siano $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ elementi linearmente indipendenti di V con $m<n$. E' possibile allora trovare in V degli elementi $\underline{v}_{m+1},\dots,\underline{v}_n$ in modo che $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ sia una base di V.

DIMOSTRAZIONE

Siccome $m<n$, per la definizione di dimensione $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ non possono costituire una base di V e quindi non possono generare tutto V. Deve dunque esistere un elemento $\underline{v}_{m+1}$ di V che non appartiene al sottospazio di V generato da $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$. Allora gli elementi

$$\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m,\underline{v}_{m+1}$$

sono linearmente indipendenti. Infatti se valesse una relazione di dipendenza lineare,

cioè $\alpha_1\underline{v}_1+\dots+\alpha_m\underline{v}_m+\alpha_{m+1}\underline{v}_{m+1}=\underline{0}$

con almeno uno scalare $\alpha_i\neq 0$ $(i=1,\dots,n)$

lo scalare α_{m+1} non potrebbe essere nullo altrimenti avremmo ottenuto

$$\alpha_1\underline{v}_1+\dots+\alpha_m\underline{v}_m=\underline{0}$$

con scalari non tutti nulli, contro il fatto che $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ sono linearmente indipendenti. Ricavando allora $\underline{v}_{m+1}$ in termini di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$, scrivendo cioè

$$\underline{v}_{m+1} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_{m+1}} \underline{v}_1 + \dots + \frac{-\alpha_m}{\alpha_{m+1}} \underline{v}_m$$

si otterrebbe una contraddizione col fatto che $\underline{v}_{m+1}$ non appartiene al sottospazio generato da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$. Concludiamo che in V esiste un $\underline{v}_{m+1}$ tale che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+1}$ sono linearmente indipendenti. Se $m+1 = n$, per il teorema della dimensione, la tesi è provata. Se invece $m+1 < n$, procediamo per induzione. Supponiamo, cioè, che per un intero positivo $r < n-m$ esistano r elementi di V tali che

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_{m+r}$$

siano linearmente indipendenti, e dimostriamo che in V esiste un $\underline{v}_{m+r+1}$ tale che

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_{m+r}, \underline{v}_{m+r+1}$$

sono linearmente indipendenti.

In modo del tutto analogo al caso precedente si ha che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+2}, \dots, \underline{v}_{m+r}$ non possono costituire una base di V perché $m+r<n$ e quindi non possono generare tutto V.
Deve dunque esistere un elemento $\underline{v}_{m+r+1}$ di V che non appartiene al sottospazio di V generato da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+2}, \dots, \underline{v}_{m+r}$.
Allora gli elementi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_{m+r}, \underline{v}_{m+r+1}$ sono linearmente indipendenti. Infatti se valesse una relazione di dipendenza lineare, cioè $\beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_m \underline{v}_m + \beta_{m+2} \underline{v}_{m+2} + \dots + \beta_{m+r} \underline{v}_{m+r} + \beta_{m+r+1} \underline{v}_{m+r+1} = \underline{0}$ con almeno uno scalare $\beta_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, m+r+1)$ lo scalare β_{m+r+1} non potrebbe essere nullo altrimenti avremmo ottenuto

$$\beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_m \underline{v}_m + \beta_{m+2} \underline{v}_{m+2} + \dots + \beta_{m+r} \underline{v}_{m+r} = \underline{0}$$

con scalari non tutti nulli, contro il fatto che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+2}, \dots, \underline{v}_{m+r}$ sono linearmente indipendenti. Ricavando allora $\underline{v}_{m+r+1}$ in termini di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+2}, \dots, \underline{v}_{m+r}$, scrivendo, cioè,

$$\underline{v}_{m+r+1} = \frac{-\beta_1}{\beta_{m+r+1}}\underline{v}_1 + \dots + \frac{-\beta_m}{\beta_{m+r+1}}\underline{v}_m + \frac{-\beta_{m+1}}{\beta_{m+r+1}}\underline{v}_{m+1} + \dots + \frac{-\beta_{m+r}}{\beta_{m+r+1}}\underline{v}_{m+r}$$

si otterrebbe una contraddizione col fatto che $\underline{v}_{m+r+1}$ non appartiene al sottospazio generato da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_{m+r}$. Abbiamo quindi dimostrato per induzione che per ogni $r < n-m$, in V esistono $r+1$ elementi tali che

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_{m+r+1} \quad \text{sono}$$

linearmente indipendenti e quindi per $r = n-m-1$ $(< n-m)$, ovvero per $m+r+1 = n$, si ottengono n vettori di V

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \quad \text{linearmente}$$

indipendenti. Per il teorema della dimensione essi costituiscono una base di V.

■

Concludiamo questo paragrafo con una importante proposizione riguardante le dimensioni di alcuni spazi vettoriali notevoli.

PROPOSIZIONE 1.7.4 (relazione di GRASSMANN)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ due suoi sottospazi.

Allora

$$\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $r = \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$ ed $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r\}$ una base di $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Poichè $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ è un sotto=spazio di $\mathcal{U}$, possiamo completare la base di $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ per ottenere una base di $\mathcal{U}$.

Così otteniamo per $\mathcal{U}$ la base

$$\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r, \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_{s-r}\}$$

dove $s = \dim \mathcal{U}$.

Parimenti per $\mathcal{W}$ otteniamo la base

$$\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r, \underline{g}_1, \dots, \underline{g}_{t-r}\}$$

dove $t = \dim \mathcal{W}$.

Allora il sistema di vettori

$$\{ \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r, \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_{s-r}, \underline{g}_1, \dots, \underline{g}_{t-r} \}$$

genera lo spazio $\mathcal{U} + \mathcal{W}$. Dimostriamo ~~ch~~ che il suddetto sistema è libero ~~...~~.
A tale proposito consideriamo la relazione

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \underline{e}_i + \sum_{j=1}^{s-r} \beta_j \underline{f}_j + \sum_{k=1}^{t-r} \gamma_k \underline{g}_k = \underline{0}$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{s-r}, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-r}$, $r+(s-r)+(t-r) =$
$= \cancel{r}+s-\cancel{r}+t-r = s+t-r$ scalari arbitrari.

Poniamo
$$\underline{v}_e = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \underline{e}_i$$
$$\underline{v}_f = \sum_{j=1}^{s-r} \beta_j \underline{f}_j$$
$$\underline{v}_g = \sum_{k=1}^{t-r} \gamma_k \underline{g}_k \,,$$ ovviamente risulta:

$\underline{v}_e \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$

$\underline{v}_f \in \mathcal{U}$ e se $\underline{v}_f \neq \underline{0}$ allora $\underline{v}_f \notin \mathcal{W}$

$\underline{v}_g \in \mathcal{W}$ e se $\underline{v}_g \neq \underline{0}$ allora $\underline{v}_g \notin \mathcal{U}$

Con questa notazione la relazione precedente si scrive

$$\underline{v}_e + \underline{v}_f + \underline{v}_g = \underline{0}$$

Se $\underline{v}_g \neq \underline{0}$, da questa relazione risulta

$$\underline{v}_g = -\underline{v}_e - \underline{v}_f \in \mathcal{U}$$

in contrasto con $\underline{v}_g \notin \mathcal{U}$. Allora

$$\underline{v}_g = \underline{0}$$

Parimenti se $\underline{v}_f \neq 0$ risulta

$$\underline{v}_f = -\underline{v}_e - \underline{v}_g \in \mathcal{W}$$

in contrasto con $\underline{v}_f \notin \mathcal{W}$. Allora

$$\underline{v}_f = \underline{0}$$

E la relazione diventa $\underline{v}_e + \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, cioè

$$\underline{v}_e = \underline{0}$$

Tenendo conto che $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_{t-r}$ sono linearmente indipendenti, da $\underline{v}_g = \underline{0}$ segue

$$\gamma_1 = 0, \dots, \gamma_{t-r} = 0.$$

Parimenti, tenendo conto che $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_{s-r}$ sono linearmente indipendenti, da $\underline{v}_f = \underline{0}$ segue

$$\beta_1 = 0, \ldots, \beta_{s-r} = 0 .$$

Infine, tenendo conto che $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_r$ sono linearmente indipendenti, da $\underline{v}_e = \underline{0}$ segue

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_r = 0 .$$

In conclusione la relazione di partenza

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \underline{e}_i + \sum_{j=1}^{s-r} \beta_j \underline{f}_j + \sum_{k=1}^{t-r} \gamma_k \underline{g}_k = \underline{0}$$

implica

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_r = 0, \beta_1 = 0, \ldots, \beta_{s-r} = 0, \gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_{t-r} = 0$$

quindi i vettori

$$\{ \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_r, \underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_{s-r}, \underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_{t-r} \}$$

sono linearmente indipendenti. Da quanto detto risulta che tali vettori formano una base per $\mathcal{U} + \mathcal{W}$, dunque

$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = r + (s-r) + (t-r) = s + t - r$$

e cioè $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.

$\blacksquare$