# 1.4) - SOTTOSPAZI GENERATI -
## - SOMMA DI SOTTOSPAZI -
## - UNIONE DI SOTTOSPAZI -

Poniamo alcune distinzioni terminologiche di importanza non secondaria.

Un sottoinsieme finito di un insieme non vuoto $A$ può essere denotato elencando tutti i suoi elementi per mezzo del simbolo

$$\{a_1, \dots, a_n\} \quad \text{con } a_i \in A,\ i = 1, \dots, n.$$

Naturalmente in questa scrittura possono comparire delle ripetizioni che non alterano il sottoinsieme; per esempio, l'insieme

$$\{a_1, a_2, a_2, a_3\} \quad \text{coincide con}$$

l'insieme $\{a_1, a_2, a_3\}$ perché ogni elemento del primo insieme è anche elemento del secondo, e viceversa.

Generalizziamo, adesso, il concetto di sottoinsieme di un insieme $A$ costituito da $n$ elementi. Consideriamo dapprima l'insieme delle $n$-uple ordinate $(a_1, \dots, a_n)$ di elementi di $A$, cioè gli elementi del prodotto cartesiano

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-volte}} = A^n$$

e "distruggiamone" l'ordine considerando uguali (o equivalenti) due $n$-uple siffatte che differiscono solo per l'ordine delle componenti ottenendo così *$n$-uple non ordinate* di elementi di $A$. Indichiamo tali oggetti con lo stesso simbolo usato per denotare i sottoinsiemi finiti di elementi di $A$:

$$\{a_1, \dots, a_n\}$$

e li chiamiamo *sistemi di ordine $n$* di elementi di $A$. Si osservi, però, che adesso eventuali ripetizioni che compaiono nella lista dei simboli denotanti gli elementi di A sono significative ai fini dell'individuazione del sistema stesso. Infatti, a differenza del caso degli insiemi finiti, per esempio, il sistema di ordine 4 $\{a_1, a_2, a_2, a_3\}$ è diverso dal sistema di ordine 3 $\{a_1, a_2, a_3\}$, essendo il primo sistema una quaterna non ordinata di elementi di A ed il secondo una terna non ordinata di elementi di A; il primo deriva dall'insieme $A \times A \times A \times A = A^4$ dopo aver "distrutto" l'ordine delle componenti dei suoi elementi, il secondo dall'insieme $A \times A \times A = A^3$. Naturalmente si ha che un sistema di ordine n di elementi di A

$$\{a_1, \ldots, a_n\}$$

coincide con l'insieme di n elementi di A

$$\{a_1, \ldots, a_n\}$$

se e solo se il sistema è costituito da elementi distinti di A. Con questa avvertenza, quindi, in seguito prenderemo sovente in considerazione sistemi di ordine n di vettori di un

$\mathbb{K}$ - spazio vettoriale $V$

$$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

le chiameremo anche <u>sistema di n vettori di V</u>, e sistemi di ordine n di elementi del campo $\mathbb{K}$

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

le chiameremo anche <u>sistema di n scalari</u>.

DEFINIZIONE 1.4.1 (di combinazione lineare)

Dato un sistema di n vettori di $V$:

$$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\},$$

e un sistema di n scalari:

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\},$$

si dice <u>combinazione lineare</u> dei vettori del sistema $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ con coefficienti gli scalari del sistema $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ il vettore $\underline{v}$ di $V$ dato da

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n ,$$

ovvero utilizzando il simbolo di sommatoria

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i .$$

In tal caso si dice pure che $\underline{v}$ <u>dipende linearmente</u> dai vettori del sistema $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$. ■

Si noti che, in virtù delle proprietà associativa e commutativa della somma tra vettori, il vettore $\underline{v}$, combinazione lineare dei vettori del sistema $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$, è ben determinato dalla definizione precedente; infatti esso non dipende dall'ordine in cui si eseguono le somme né dal modo di associare, tramite eventuali parentesi, i termini della sommatoria stessa.

Si osservi inoltre che, per $n=1$, le combinazioni lineari di $\{v_1\}$ sono i vettori $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1$ con $\alpha_1 \in \mathbb{K}$.

Osserviamo anche i seguenti fatti:

1) Il vettore nullo dipende linearmente da qualsiasi sistema di vettori di $V$, infatti si ha:

$$\underline{0} = 0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_n$$

2) Ogni vettore di qualsiasi sistema di vettori di $V$ dipende linearmente dal sistema stesso, infatti si ha

$$\underline{v}_1 = 1\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + 0\underline{v}_n$$

$$\underline{v}_n = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + 1\underline{v}_n$$

e se $1<i<n$ $\underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + \dots + 1\underline{v}_i + \dots + 0\underline{v}_n$

3) I vettori $\underline{w}$ di $V$ che dipendono linearmente da un sistema $\{\underline{v}\}$ costituito da un solo vettore di $V$ sono tutti e soli quelli del tipo

$$\underline{w} = \alpha \underline{v}$$

al variare di $\alpha$ in $\mathbb{K}$. Essi si dicono <u>proporzionali</u> a $\underline{v}$. Tra questi, per $\alpha=0$, si ha pure il vettore nullo. L'unico vettore proporzionale al vettore nullo è il vettore nullo stesso perché

$$\underline{0} = \alpha \underline{0}, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Sia $S$ un sistema di ordine $n$ di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $V$:

$$S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

I vettori ottenuti dall'espressione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$$

al variare del sistema di $n$ scalari $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ formano un sottoinsieme di $V$, che indichiamo col simbolo $L(S)$, i cui elementi sono i vettori di $V$ che dipendono linearmente dai vettori di $S$ (o che sono combinazioni lineari di questi), in simboli:

$$L(S) = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \dots, n\}$$

e risulta quindi $L(S) \subseteq V$.

Inoltre si ha:

PROPOSIZIONE 1.4.1 (del sottoinsieme generato)

Il sottoinsieme $L(S)$ di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $V$, di tutte le combinazioni lineari di un sistema di $n$ elementi di $V$, è un sottospazio di $V$.

DIMOSTRAZIONE

L'insieme $L(S)$ è non vuoto, infatti il vettore nullo, come visto può essere ottenuto come combinazione lineare degli elementi del sistema $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ nel modo seguente

$$\underline{0} = 0\underline{v}_1 + \dots + 0\underline{v}_n$$

e dunque $\underline{0} \in L(S)$ (SP0 verificata).

Siano ora

$$\underline{w}_1 = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$$

e $$\underline{w}_2 = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$$

due elementi di $L(S)$, anche la loro somma

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = (\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) + (\beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)\underline{v}_n$$ è un elemento di $L(S)$ trattasi ancora di una combinazione lineare degli elementi di $S$, gli scalari in questione sono quelli del sistema

$$\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n\}.$$

Dunque l'insieme $L(S)$ è stabile rispetto alla somma di vettori (SP1 verificata).

Sia $\alpha$ uno scalare e $\underline{w} = \gamma_1 \underline{v}_1 + \dots + \gamma_n \underline{v}_n$ un elemento di $L(S)$, allora il prodotto

$$\alpha \underline{w} = \alpha(\gamma_1 \underline{v}_1 + \dots + \gamma_n \underline{v}_n) = (\alpha\gamma_1)\underline{v}_1 + \dots + (\alpha\gamma_n)\underline{v}_n$$

è ancora una combinazione lineare di vettori di $S$; gli scalari in questione sono quelli del sistema $\{\alpha\gamma_1, \dots, \alpha\gamma_n\}$. Abbiamo dimostrato che $L(S)$ è stabile anche rispetto al prodotto per uno scalare (SP2 verificata). Allora il sottoinsieme $L(S)$ di $V$, per la proprietà 1.3.2, è un sottospazio vettoriale di $V$. ■

Risulta, dunque, ben posta la seguente:

DEFINIZIONE 1.4.2 (di sistema di generatori e di spazi finitamente generati)

Un sistema $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $V$ è detto <u>sistema di generatori</u> di $L(S)$. Se $L(S) = V$, ovvero se ogni vettore di $V$ è combinazione lineare dei vettori di $S$ (o dipende linearmente da questi) allora

$S$ è un sistema di generatori di $V$; in tal caso $V$ è detto <u>finitamente generato</u>. ∎

Ovviamente, come già visto, ogni elemento di $S$ dipende linearmente da $S$ stesso e dunque risulta, in caso $S$ si riduce ad un insieme, $S \subseteq L(S)$ ed $L(S)$ è il più piccolo sottospazio di $V$ che contiene l'insieme $S$. Infatti se $W$ è un altro sottospazio di $V$ che contiene l'insieme $S$ per la stabilità di $W$, $W$ deve contenere anche tutte le combinazioni lineari degli elementi di $S$, e dunque risulta $L(S) \subseteq W$.

Per quanto riguarda le proprietà di due sistemi di generatori, si ha:

PROPOSIZIONE 1.4.2 (dei generatori dipendenti)

Siano $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $T = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ due sistemi di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $V$. Se tutti gli elementi di $T$ dipendono linearmente dagli elementi di $S$ allora $L(T)$ è un sottospazio vettoriale di $L(S)$. In simboli

$$\underline{w}_i \in L(S), \forall i=1,\dots,m \Rightarrow L(T) \subseteq L(S)$$

DIMOSTRAZIONE

$L(T)$ è certamente un sottospazio vettoriale di $V$, dunque $L(T)$ è spazio vettoriale per cui dobbiamo dimostrare solo che $L(T)$ è un sottoinsieme di $L(S)$ facendo vedere che ogni elemento di $L(T)$ appartiene anche ad $L(S)$.

Preso, allora, un $\underline{v} \in L(T)$, cioè sia

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_m \underline{w}_m \; .$$

Per ipotesi risulta

$$\underline{w}_1 = \beta_{11}\underline{v}_1 + \dots + \beta_{1n}\underline{v}_n$$
$$\underline{w}_2 = \beta_{21}\underline{v}_1 + \dots + \beta_{2n}\underline{v}_n$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$\underline{w}_m = \beta_{m1}\underline{v}_1 + \dots + \beta_{mn}\underline{v}_n$$

con $\beta_{ij}$, $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$, $n \times m$ scalari opportuni. Sostituendo queste espressioni degli elementi di T nell'espressione di $\underline{v}$, 12

sfruttando la proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di scalari, si ottiene per $\underline{v}$ una combinazione lineare degli elementi di S

$$\underline{v} = (\alpha_1 \beta_{11} + \alpha_2 \beta_{21} + \dots + \alpha_m \beta_{m1})\underline{v}_1 +$$
$$+ (\alpha_1 \beta_{12} + \alpha_2 \beta_{22} + \dots + \alpha_m \beta_{m2})\underline{v}_2 +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots +$$
$$+ (\alpha_1 \beta_{1n} + \alpha_2 \beta_{2n} + \dots + \alpha_m \beta_{mn})\underline{v}_n$$

dove il sistema di scalari in questione è quello costituito dalle espressioni in parentesi. Dunque, risulta $\underline{v} \in L(S)$ e stante la sua arbitrarietà, $L(T) \subseteq L(S)$. ∎

Naturalmente vale anche il viceversa, cioè

$$L(T) \subseteq L(S) \Rightarrow \underline{w}_i \in L(S), \forall i = 1, \dots, m.$$

Infatti abbiamo già visto che $\underline{w}_i \in L(T), \forall i = 1, \dots, m$ e dall'ipotesi

$L(T) \subseteq L(S)$ segue la tesi. Dunque possiamo scrivere l'equivalenza

$$\underline{w}_i \in L(S), \forall i = 1, \dots, m \Leftrightarrow L(T) \subseteq L(S)$$

Supponiamo adesso che anche gli elementi di $S$ siano combinazioni lineari di quelli di $T$, cioè supponiamo che valgono insieme le seguenti condizioni:

$$\underline{w}_i \in L(S), \forall i = 1, \dots m$$

e $$\underline{v}_j \in L(T), \forall j = 1, \dots, n.$$

Allora insieme all'ultima equivalenza, scambiando i ruoli di $S$ e $T$, possiamo scrivere anche quest'altra

$$\underline{v}_j \in L(T), \forall j = 1, \dots, n \Leftrightarrow L(S) \subseteq L(T)$$

e combinandole insieme si ha in definitiva la:

PROPOSIZIONE 1.4.3 (dei generatori equivalenti)

$$\underline{w}_i \in L(S), \forall i = 1, \dots, m \wedge \underline{v}_j \in L(T), \forall j = 1, \dots, n \Leftrightarrow L(T) = L(S).$$

Cioè, se e solo se gli elementi di un sistema $S$ sono combinazioni lineari degli elementi di un sistema $T$ e gli elementi di $T$ combinazioni