1.4) - SOTTOSPAZI GENERATI -
- SOMMA DI SOTTOSPAZI -
- UNIONE DI SOTTOSPAZI -

Poniamo alcune distinzioni terminologiche di importanza non secondaria.

Un sottoinsieme finito di un insieme non vuoto A può essere denotato elencando tutti i suoi elementi per mezzo del simbolo

$$\{a_1, \ldots, a_n\} \quad \text{con } a_i \in A,\ i = 1, \ldots, n.$$

Naturalmente in questa scrittura possono comparire delle ripetizioni che non alterano il sottoinsieme; per esempio, l'insieme

$$\{a_1, a_2, a_2, a_3\} \quad \text{coincide con}$$

l'insieme $\{a_1, a_2, a_3\}$ perché ogni elemento del primo insieme è anche elemento del secondo, e viceversa.

Generalizziamo, adesso, il concetto di sottoinsieme di un insieme A costituito da n elementi. Consideriamo dapprima l'insieme delle n-uple ordinate $(a_1, \dots, a_n)$ di elementi di A, cioè gli elementi del prodotto cartesiano

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-volte}} = A^n$$

e "distruggiamone" l'ordine considerando uguali (o equivalenti) due n-uple siffatte che differiscono solo per l'ordine delle componenti ottenendo così <u>n-uple non ordinate</u> di elementi di A. Indichiamo tali oggetti con lo stesso simbolo usato per denotare i sottoinsiemi finiti di elementi di A:

$$\{a_1, \dots, a_n\}$$

e li chiamiamo <u>sistemi di ordine n</u> di elementi di A. Si osservi, però, che adesso eventuali ripetizioni che compaiono nella lista dei simboli denotanti gli elementi di A sono significative ai fini dell'individuazione del sistema stesso. Infatti, a differenza del caso degli insiemi finiti, per esempio, il sistema di ordine 4 $\{a_1, a_2, a_2, a_3\}$ è diverso dal sistema di ordine 3 $\{a_1, a_2, a_3\}$, essendo il primo sistema una quaterna non ordinata di elementi di A ed il secondo una terna non ordinata di elementi di A; il primo deriva dall'insieme $A \times A \times A \times A = A^4$ dopo aver "distrutto" l'ordine delle componenti dei suoi elementi, il secondo dall'insieme $A \times A \times A = A^3$. Naturalmente si ha che un sistema di ordine n di elementi di A

$$\{a_1, --, a_n\}$$

coincide con l'insieme di n elementi di A

$$\{a_1 - , a_n\}$$

se e solo se il sistema è costituito da elementi distinti di A. Con questa avvertenza, quindi, in seguito prenderemo sovente in considerazione sistemi di ordine n di vettori di un

$\mathbb{K}$-spazio vettoriale V

$$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

le chiameremo anche <u>sistema di n vettori di V</u>,

e sistemi di ordine n di elementi del campo $\mathbb{K}$

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

le chiameremo anche <u>sistema di n scalari</u>.

DEFINIZIONE 1.4.1 (di combinazione lineare)

Dato un sistema di n vettori di V:

$$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\},$$

e un sistema di n scalari:

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\},$$

si dice <u>combinazione lineare</u> dei vettori del sistema $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ con coefficienti gli scalari del sistema $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ il vettore $\underline{v}$ di V dato da

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n,$$

ovvero utilizzando il simbolo di sommatoria

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i .$$

In tal caso si dice pure che $\underline{v}$ <u>dipende linearmente</u> dai vettori del sistema $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. ■

Si noti che, in virtù delle proprietà associativa e commutativa della somma tra vettori, il vettore $\underline{v}$, combinazione lineare dei vettori del sistema $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, è ben determinato dalla definizione precedente; infatti esso non dipende dall'ordine in cui si eseguono le somme né dal modo di associare, tramite eventuali parentesi, i termini della sommatoria stessa.

Si osservi inoltre che, per $n=1$, le combinazioni lineari di $\{v_1\}$ sono i vettori $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1$ con $\alpha_1 \in \mathbb{K}$.

Osserviamo anche i seguenti fatti:

1) Il vettore nullo dipende linearmente da qualsiasi sistema di vettori di V, infatti si ha:

$$\underline{0} = 0\underline{v}_1 + \dots + 0\underline{v}_n$$

2) Ogni vettore di qualsiasi sistema di vettori di V dipende linearmente dal sistema stesso, infatti si ha

$$\underline{v}_1 = 1\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + 0\underline{v}_n$$

$$\underline{v}_n = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + 1\underline{v}_n$$

e se $1 < i < n$ $\quad \underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + \dots + 1\underline{v}_i + \dots + 0\underline{v}_n$

3) I vettori $\underline{w}$ di V che dipendono linearmente da un sistema $\{\underline{v}\}$ costituito da un solo vettore di V sono tutti e soli quelli del tipo

$$\underline{w} = \alpha \underline{v}$$

al variare di α in $\mathbb{K}$. Essi si dicono <u>proporzionali</u> a $\underline{v}$. Tra questi, per $\alpha = 0$, si ha pure il vettore nullo. L'unico vettore proporzionale al vettore nullo è il vettore nullo stesso perché

$$\underline{0} = \alpha \underline{0}, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Sia S un sistema di ordine n di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V:

$$S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

I vettori ottenuti dall'espressione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$$

al variare del sistema di n scalari $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ formano un sottoinsieme di V, che indichiamo col simbolo $L(S)$, i cui elementi sono i vettori di V che dipendono linearmente dai vettori di S (o che sono combinazioni lineari di questi), in simboli:

$$L(S) = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \dots, n\}$$

e risulta quindi $L(S) \subseteq V$.

Inoltre si ha:

PROPOSIZZZONE 1.4.1 (del sottoinsieme generato)

Il sottoinsieme $L(S)$ di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, di tutte le combinazioni lineari di un sistema di n elementi di V, è un sottospazio di V.

DIMOSTRAZIONE

L'insieme $L(S)$ è non vuoto, infatti il vettore nullo, come visto può essere ottenuto come combinazione lineare degli elementi del sistema $S=\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ nel modo seguente

$$\underline{0} = 0\underline{v}_1 + \dots + 0\underline{v}_n$$

e dunque $\underline{0} \in L(S)$ (SP0 verificata).

Siano ora

$$\underline{w}_1 = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$$

e

$$\underline{w}_2 = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$$

due elementi di $L(S)$, anche la loro somma

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = (\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) + (\beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)\underline{v}_n$$ è un elemento

di $L(S)$ trattasi ancora di una combinazione lineare degli elementi di S, gli scalari in questione sono quelli del sistema

$$\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n\}.$$

Dunque l'insieme $L(S)$ è stabile rispetto alla somma di vettori (SP1 verificata).

Sia α uno scalare e $\underline{w} = \gamma_1 \underline{v}_1 + \cdots + \gamma_n \underline{v}_n$ un elemento di $L(S)$, allora il prodotto

$$\alpha \underline{w} = \alpha(\gamma_1 \underline{v}_1 + \cdots + \gamma_n \underline{v}_n) = (\alpha\gamma_1)\underline{v}_1 + \cdots + (\alpha\gamma_n)\underline{v}_n$$

è ancora una combinazione lineare di vettori di S; gli scalari in questione sono quelli del sistema $\{\alpha\gamma_1, \ldots, \alpha\gamma_n\}$. Abbiamo dimostrato che $L(S)$ è stabile anche rispetto al prodotto per uno scalare (SP_2 verificata). Allora il sottoinsieme $L(S)$ di V, per la proprietà 1.3.2, è un sottospazio vettoriale di V. ∎

Risulta, dunque, ben posta la seguente:

DEFINIZIONE 1.4.2 (di sistema di generatori e di spazi finitamente generati)

Un sistema $S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è detto <u>sistema di generatori</u> di $L(S)$. Se $L(S) = V$, ovvero se ogni vettore di V è combinazione lineare dei vettori di S (o dipende linearmente da questi) allora

S è un sistema di generatori di V; in tal caso V è detto <u>finitamente generato</u>. ■

Ovviamente, come già visto, ogni elemento di S dipende linearmente da S stesso e dunque risulta, in caso S si riduce ad un insieme, $S \subseteq L(S)$ ed $L(S)$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene l'insieme S. Infatti se W è un altro sottospazio di V che contiene l'insieme S per la stabilità di W, W deve contenere anche tutte le combinazioni lineari degli elementi di S, e dunque risulta $L(S) \subseteq W$.

Per quanto riguarda le proprietà di due sistemi di generatori, si ha:

PROPOSIZIONE 1.4.2 (dei generatori dipendenti)

Siano $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $T = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ due sistemi di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Se tutti gli elementi di T dipendono linearmente dagli elementi di S allora $L(T)$ è un sottospazio vettoriale di $L(S)$. In simboli

$$\underline{w}_i \in L(S), \forall i=1,\dots,m \Rightarrow L(T) \subseteq L(S)$$

DIMOSTRAZIONE

$L(T)$ è certamente un sottospazio vettoriale di V, dunque $L(T)$ è spazio vettoriale per cui dobbiamo dimostrare solo che $L(T)$ è un sottoinsieme di $L(S)$ facendo vedere che ogni elemento di $L(T)$ appartiene anche ad $L(S)$.

Preso, allora, un $\underline{v} \in L(T)$, cioè sia

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_m \underline{w}_m .$$

Per ipotesi risulta

$$\underline{w}_1 = \beta_{11} \underline{v}_1 + \dots + \beta_{1n} \underline{v}_n$$
$$\underline{w}_2 = \beta_{21} \underline{v}_1 + \dots + \beta_{2n} \underline{v}_n$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\underline{w}_m = \beta_{m1} \underline{v}_1 + \dots + \beta_{mn} \underline{v}_n$$

con β_{ij}, $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$, $n \times m$ scalari opportuni. Sostituendo queste espressioni

degli elementi di T nell'espressione di $\underline{v}$,
sfruttando la proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di scalari, si ottiene per $\underline{v}$ una combinazione lineare degli elementi di S

$$\underline{v} = (\alpha_1 \beta_{11} + \alpha_2 \beta_{21} + \dots + \alpha_m \beta_{m1}) \underline{v}_1 +$$
$$+ (\alpha_1 \beta_{12} + \alpha_2 \beta_{22} + \dots + \alpha_m \beta_{m2}) \underline{v}_2 +$$
$$+ \text{ - - - - - - - - - } +$$
$$+ (\alpha_1 \beta_{1n} + \alpha_2 \beta_{2n} + \dots + \alpha_m \beta_{mn}) \underline{v}_n$$

dove il sistema di scalari in questione è quello costituito dalle espressioni in parentesi.
Dunque, risulta $\underline{v} \in L(S)$ e stata la sua arbitrarietà,
$L(T) \subseteq L(S)$. ■

Naturalmente vale anche il viceversa, cioè

$$L(T) \subseteq L(S) \Rightarrow \underline{w}_i \in L(S), \forall i = 1, \dots, m.$$

Infatti abbiamo già visto che
$\underline{w}_i \in L(T), \forall i = 1, \dots, m$ e dall'ipotesi

$L(T) \subseteq L(S)$ segue la tesi. Dunque possiamo scrivere l'equivalenza

$$\underline{w}_i \in L(S), \forall i = 1, \dots, m \iff L(T) \subseteq L(S)$$

Supponiamo adesso che anche gli elementi di S siano combinazioni lineari di quelli di T, cioè supponiamo che valgono insieme le seguenti condizioni:

$$\underline{w}_i \in L(S), \forall i = 1, \dots m$$

$$\text{e} \qquad \underline{v}_j \in L(T), \forall j = 1, \dots, n \; .$$

Allora insieme all'ultima equivalenza, scambiando i ruoli di S e T, possiamo scrivere anche quest'altra

$$\underline{v}_j \in L(T), \forall j = 1, \dots, n \iff L(S) \subseteq L(T)$$

e combinandole insieme si ha indefinitiva la:

PROPOSIZIONE 1.4.3 (dei generatori equivalenti)

$$\underline{w}_i \in L(S), \forall i = 1, \dots, m \wedge \underline{v}_j \in L(T), \forall j = 1, \dots, n \iff L(T) = L(S).$$

Cioè, se e solo se gli elementi di un sistema S sono combinazioni lineari degli elementi di un sistema T e gli elementi di T combinazioni lineari degli elementi di S, allora i sistemi S e T generano lo stesso spazio vettoriale. ■

Nel caso di validità dell'ipotesi della proposizione precedente i sistemi S e T sono detti sistemi di generatori equivalenti perché appunto generano il medesimo spazio vettoriale. In particolare se S è un <u>sottosistema</u> di T, e dunque ogni elemento di S è combinazione lineare degli elementi di T, e gli elementi di T che non sono elementi di S sono combinazioni lineari di questi, allora al posto degli elementi di T come sistema di generatori di $L(T)$ possiamo prendere il sottosistema S.

Da quanto detto risulta pertanto anche la seguente

DEFINIZIONE 1.4.3 (di sistema minimale di generatori)
Un sistema S di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è detto sistema minimale di generatori di $L(S)$ se non contiene propriamente alcun sottosistema di generatori ad esso equivalente. ■

In altre parole, il contenuto della definizione 1.4.3, significa che S è un sistema minimale di generatori se ogni suo sottosistema proprio non è più in grado di generare $L(S)$.
Ne segue il cosiddetto <u>metodo degli scarti</u>:
è possibile ridurre l'ordine di un sistema di generatori T di $L(T)$ eliminando da T successivamente, uno per volta, tutti gli eventuali elementi che sono combinazione lineare dei rimanenti (o che dipendono linearmente dai rimanenti) ottenendo così un sistema S minimale di generatori equivalente a T. Tutto quanto è stato detto sarà ben illustrato dagli esempi che seguono.

ESEMPIO 1.4.1

Sia S il seguente sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(1,0,1); (0,1,0)\}$$

Notiamo subito che il sistema dato, S, è costitui= to da elementi distinti, dunque esso è un insieme. Si ha che $S \subset \mathbb{R}^3$, ma S non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché, per esempio, esso non contiene il vettore nullo $(0,0,0)$.

L'insieme delle combinazioni lineari degli elementi di S, cioè l'insieme $L(S)$, è costi= tuito dagli elementi del tipo

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(0,1,0) =$$
$$= (\alpha_1,0,\alpha_1)+(0,\alpha_2,0) =$$
$$= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1), \text{ con } \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Posto allora $\begin{cases} x=\alpha_1 \\ y=\alpha_2 \\ z=\alpha_1 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} x=\alpha_1 \text{ (arbitrario)} \\ y=\alpha_2 \text{ (arbitrario)} \\ z=x \end{cases}$

possiamo dunque caratterizzare $L(S)$ nel seguente modo

$$L(S)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z\};$$

ovvero $L(S)$ è l'insieme di tutte le terne ordi=

nate di numeri reali aventi la prima e l'ultima componente uguali.
Si vede subito che $L(S)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$:
Infatti la terna $(0,0,0)$ verifica l'equazione caratteristica di $L(S)$ (SP0 verificata)
Inoltre se (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) sono elementi di $L(S)$, cioè tali che $x_1 = z_1$ e $x_2 = z_2$ allora anche la loro somma

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$$

verifica l'equazione caratteristica di $L(S)$, infatti risulta che $x_1 + x_2 = z_1 + z_2$, dunque $L(S)$ è stabile rispetto alla somma (SP1 verificata).
~~Ed~~ ancora, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in L(S)$, ovvero è tale che $x = z$, anche il prodotto

$$\alpha (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$ verifica

l'equazione caratteristica di $L(S)$, infatti risulta che $\alpha x = \alpha z$, dunque $L(S)$ è stabile anche rispetto al prodotto esterno.
Concludiamo dicendo che $L(S)$ è un sottospazio vet=

toriale di $\mathbb{R}^3$. Naturalmente $L(S) \neq \mathbb{R}^3$, infatti, per esempio, il vettore $(1,1,2)$ di $\mathbb{R}^3$ non appartiene invece ad $L(S)$ perchè esso non verifica l'equazione caratteristica di $L(S)$ $(1 \neq 2)$; ne segue che il sistema dato <u>non</u> è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$. Esso è, però, un sistema minimale di generatori di $L(S)$, infatti i suoi possibili sottosistemi propri (escluso ovviamente l'insieme vuoto che non è un sistema di generatori) cioè gli insiemi $\{(1,0,1)\}$ e $\{(0,1,0)\}$ non generano, singolarmente, $L(S)$ in quanto, per esempio, la terna $(1,1,1)$ che appartiene ad $L(S)$ non può essere generata nè da $(1,0,1)$ nè da $(0,1,0)$. ■

Studiamo, ora, un altro sotto-spazio notevole

DEFINIZIONE 1.4.4 (di somma di sottospazi)
Siano V_1 e V_2 due sottospazi di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Denotiamo con $V_1 + V_2$, e lo chiamiamo <u>somma di V_1 e V_2</u>, l'insieme definito da:

$$V_1 + V_2 = \{ \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V \mid \underline{v}_1 \in V_1 \wedge \underline{v}_2 \in V_2 \}.$$ ■

In altre parole l'insieme somma di due sottospazi V_1 e V_2 di V è il sottoinsieme di V i cui elementi provengono dalla somma di un elemento di V_1 con un elemento di V_2.

PROPOSIZIONE 1.4.4 (dell'insieme somma)

L'insieme somma di due sottospazi vettoriali di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

DIMOSTRAZIONE

Siano V_1 e V_2 due sottospazi vettoriali di V. Ogni elemento dell'insieme somma V_1+V_2 è ovviamente anche elemento di V, dunque $V_1+V_2 \subseteq V$. Inoltre il vettore nullo è somma del vettore nullo contenuto in V_1 e del vettore nullo contenuto in V_2 e dunque risulta $\underline{0} \in V_1+V_2$ (SP0 verificata).

Presi due elementi arbitrari di $V_1 + V_2$,

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \quad \text{con } \underline{v}_1 \in V_1 \text{ e } \underline{v}_2 \in V_2$$

e

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \quad \text{con } \underline{w}_1 \in V_1 \text{ e } \underline{w}_2 \in V_2$$

risulta, per la loro somma

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = (\underline{v}_1 + \underline{w}_1) + (\underline{v}_2 + \underline{w}_2)$$

con $\underline{v}_1 + \underline{w}_1 \in V_1$ (perchè V_1 è stabile rispetto alla somma) e $\underline{v}_2 + \underline{w}_2 \in V_2$ (perchè V_2 è stabile rispetto alla somma). Dunque l'insieme $V_1 + V_2$ è stabile rispetto alla somma di vettori (SP1 verificata).

Preso uno scalare arbitrario, $\alpha \in \mathbb{K}$, risulta

$$\alpha(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \alpha \underline{v}_1 + \alpha \underline{v}_2$$

con $\alpha \underline{v}_1 \in V_1$ (perchè V_1 è stabile rispetto al prodotto per uno scalare) e $\alpha \underline{v}_2 \in V_2$ (perchè V_2 è stabile rispetto al prodotto per uno scalare). Dunque $V_1 + V_2$ è stabile anche rispetto al prodotto esterno (SP2 verificata).

Ciò dimostra che $V_1 + V_2$ è un sottospazio di V. ∎

Si osservi che se V_1 e V_2 sono sottospazio di V finitamente generati e

$$S_1 = \{ \underline{v}_{11}, \dots, \underline{v}_{2n} \}$$

$$S_2 = \{ \underline{v}_{21}, \dots, \underline{v}_{2m} \}$$

due sistemi di generatori rispettivamente di V_1 e di V_2, allora preso un $\underline{v}_1 \in V_1$ risulta

$$\underline{v}_1 = \alpha_1 \underline{v}_{12} + \dots + \alpha_n \underline{v}_{1n}$$

con $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ uno opportuno sistema di scalari, e preso un $\underline{v}_2 \in V_2$ risulta

$$\underline{v}_2 = \beta_1 \underline{v}_{21} + \dots + \beta_m \underline{v}_{2m}$$

con $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ un opportuno sistema di scalari.

Un vettore di $V_1 + V_2$ risulta, quindi, del tipo

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \alpha_1 \underline{v}_{11} + \dots + \alpha_n \underline{v}_{1n} + \beta_1 \underline{v}_{21} + \dots + \beta_m \underline{v}_{2m},$$

cioè è combinazione lineare del sistema di ordine $n+m$

$$\{ \underline{v}_{11}, \dots, \underline{v}_{1n}, \underline{v}_{21}, \dots, \underline{v}_{2m} \}$$

ottenuto <u>concatenando</u> gli elementi di S_1 con gli elementi S_2. Ne segue che il sottospazio somma $V_1 + V_2$ è generato dal sistema <u>S_1 concatenato al sistema S_2</u>. Nel caso in cui S_1 ed S_2 sono insiemi, tale sistema di generatori di $V_1 + V_2$ è, quindi, l'unione insiemistica di S_1 con S_2, cioè risulta (se S_1 ed S_2 sono insiemi) che

$$L(S_1) + L(S_2) = L(S_1 \cup S_2).$$

Si osservi, però, che in generale l'unione di due sottospazi di V <u>non</u> è un sottospazio di V, per dimostrare ciò basta considerare il seguente controesempio:

siano $S = \{\underline{v}\}$ e $T = \{\underline{w}\}$

con $\underline{v} \neq \underline{w}$ vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, tali che $\underline{v} \notin L(T)$ e $\underline{w} \notin L(S)$.

Da $\underline{v} \in L(S)$ segue ovviamente che $\underline{v} \in L(S) \cup L(T)$ e da $\underline{w} \in L(T)$ segue che $\underline{w} \in L(S) \cup L(T)$, ma la loro somma

$$\underline{v} + \underline{w} \notin L(S) \cup L(T) \quad (\text{SPL non verificata})\text{.}$$

Infatti $\underline{v} + \underline{w}$ non appartiene né ad $L(S)$ né ad $L(T)$ perché se per assurdo risultasse $\underline{v} + \underline{w} \in L(S)$ sarebbe $\underline{v} + \underline{w} = \alpha \underline{v}$, con $\alpha \in \mathbb{K}$ da cui $(\alpha - 1)\underline{v} = \underline{w}$ e cioè $\underline{w} \in L(S)$, contro l'ipotesi $\underline{w} \notin L(S)$; analogamente se per assurdo risultasse $\underline{v} + \underline{w} \in L(T)$ sarebbe $\underline{v} + \underline{w} = \alpha \underline{w}$ con $\alpha \in \mathbb{K}$ da cui $(\alpha - 1)\underline{w} = \underline{v}$ e cioè $\underline{v} \in L(T)$, contro l'ipotesi $\underline{v} \notin L(T)$.

Osserviamo, infine, che il sottoinsieme di V, $L(S) \cup L(T)$, dove S e T sono due sistemi di vettori di V, è incluso nel sottospazio di V, $L(S) + L(T)$. Infatti se

$\underline{v} \in L(S) \cup L(T)$ allora o $\underline{v} \in L(S)$ oppure $\underline{v} \in L(T)$ ed essendo sempre vero che $\underline{0} \in L(S)$ e $\underline{0} \in L(T)$ possiamo scrivere in ogni caso

$$\underline{v} = \underline{v} + \underline{0} \, ,$$

cioè che $\underline{v}$ è somma di un vettore di $L(S)$ e di un vettore di $L(T)$. Dunque risulta, tenendo presente anche altri risultati già dimostrati, che

$$L(S) \cap L(T) \subseteq L(S) \cup L(T) \subseteq L(S) + L(T) \, ,$$

ma $L(S) \cup L(T)$ può <u>non</u> essere un sottospazio vettoriale di V mentre $L(S) \cap L(T)$ ed $L(S) + L(T)$ lo sono sempre.

La nozione di sottospazio somma si può generalizzare anche a più di due sottospazi di V nel modo che segue.

Siano $V_1, V_2, \dots, V_n$, con $n \geq 2$, sottospazi vettoriali di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V; si dice somma di $V_1, V_2, \dots, V_n$ e si indica con il simbolo

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

il sottoinsieme di V i cui elementi sono del tipo

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n \,, \text{ con } \underline{v}_i \in V_i \,, \; i = 1, \dots, n.$$

In modo del tutto simile a quanto visto nel caso precedente ($n=2$) si dimostra che l'insieme $V_1 + V_2 + \dots + V_n$ è un sottospazio vettoriale di V e risulta che se $S_1, S_2, \dots, S_n$ sono sistemi di generatori rispettivamente di $V_1, V_2, \dots, V_n$, allora il sistema ottenuto concatenando tra loro $S_1, S_2 \dots S_n$ è un sistema di generatori di $V_1 + V_2 + \dots + V_n$; nel caso che tutti i sistemi $S_1, S_2, \dots, S_n$ sono insiemi si ha che l'insieme $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ è un sistema di generatori di $V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

ESERCIZIO 1.4.1

Siano $S = \{(1,0,1) ; (0,1,1)\}$

e $T = \{(-1,-1,2)\}$

due sistemi di vettori di $\mathbb{R}^3$.
Determinare i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$
$L(S)$, $L(T)$, $L(S)+L(T)$, $L(S)\cap L(T)$.
Dire se l'insieme $L(S) \cup L(T)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

SVOLGIMENTO

Se $\underline{v} \in L(S) \Rightarrow \underline{v} = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1)$
con α_1 e α_2 scalari arbitrari. Ma si ha:

$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) = (\alpha_1, 0, \alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2) =$$
$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2);$$

posto $\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_2 \\ z = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} x = \alpha_1 \text{ (arbitrario)} \\ y = \alpha_2 \text{ (arbitrario)} \\ z = x + y \end{cases}$

ovvero l'equazione caratteristica di $L(S)$ è
$x + y - z = 0$ e dunque possiamo scrivere

$$L(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}.$$

Se $\underline{v} \in L(T) \Rightarrow \underline{v} = \alpha(-1,-1,-2)$ con α scalare arbitrario. Ma si ha:

$$\alpha(-1,-1,-2) = (-\alpha,-\alpha,-2\alpha);$$

posto $\begin{cases} x=-\alpha \\ y=-\alpha \\ z=-2\alpha \end{cases}$ si ha $\begin{cases} x=-\alpha \text{ (arbitrario)} \\ y=x \\ z=2x \end{cases}$

ovvero l'equazioni caratteristiche di $L(T)$ sono $x-y=0$ e $2x-z=0$, dunque possiamo scrivere

$$L(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0 \wedge 2x-z=0\}$$

Per il calcolo della somma $L(S)+L(T)$ osserviamo che i sistemi S e T sono in realtà insiemi e quindi sfruttiamo il fatto che

$$L(S)+L(T) = L(S \cup T)$$

dove $S \cup T = \{(1,0,1);(0,1,1);(-1,-1,2)\}$

Se $\underline{v} \in L(S \cup T) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v} = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(-1,-1,-2)$

con α_1, α_2 ed α_3 scalari arbitrari. Ma si ha

$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(-1,-1,-2) =$

$= (\alpha_1, 0, \alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, -\alpha_3, -2\alpha_3) =$

$= (\alpha_1 - \alpha_3,\ \alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)$;

posto $\begin{cases} x = \alpha_1 - \alpha_3 \\ y = \alpha_2 - \alpha_3 \\ z = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \end{cases}$; si ha $\begin{cases} \alpha_1 = x + \alpha_3 \\ \alpha_2 = y + \alpha_3 \\ z = x + \cancel{\alpha_3} + y + \cancel{\alpha_3} - \cancel{2\alpha_3} \end{cases}$

da cui $\begin{cases} x = \alpha_1 - \alpha_3 \text{ (arbitrario)} \\ y = \alpha_2 - \alpha_3 \text{ (arbitrario)} \\ z = x + y \end{cases}$;

ovvero l'equazione caratteristica di $L(S \cup T)$ e quindi di $L(S) + L(T)$ è $x + y - z = 0$, dunque possiamo scrivere

$L(S) + L(T) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \}$

Osserviamo che risulta pure

$$L(S)+L(T)=L(S)$$

(infatti $L(S)$ ha la stessa equazione caratteristica di $L(S)+L(T)$). A riprova di ciò si osservi che le equazioni caratteristiche di $L(T)$ implicano quella di $L(S)$ e quindi che $L(T)\subseteq L(S)$; infatti $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow x-y=2x-z \Rightarrow$

$$\Rightarrow x+y-z=0.$$

Possiamo allora concludere che $L(S)\cap L(T)=L(T)$ ($L(T)$ l'abbiamo già determinato) e che $L(S)\cup L(T)=L(S)$ (anch'esso già determinato) e quindi che $L(S)\cup L(T)$ (in questo caso) è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. ∎

ESERCIZIO 1.4.2

Sia dato il sottoinsieme H di $\mathbb{R}^3$

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$$

Dire se H è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e in tal caso determinarne un sistema minimale di generatori.

SVOLGIMENTO

Osserviamo innanzitutto che $\underline{0} = (0,0,0) \in H$ perché la terna nulla $(0,0,0)$ soddisfa l'equazione caratteristica di H, $0 - 20 = 0 \Rightarrow 0 - 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 0$,

Proviamo la stabilità di H rispetto alla somma.

Siano $(x_1, y_1, z_1) \in H \Rightarrow x_1 - 2y_1 = 0$

e $(x_2, y_2, z_2) \in H \Rightarrow x_2 - 2y_2 = 0$

La loro somma

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

soddisfa l'equazione caratteristica di H perché si ha $(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1+x_2-2y_1-2y_2=0 \Rightarrow (x_1-2y_1)+(x_2-2y_2)=0$

e per quanto detto in precedenza si ha

$0+0=0 \Rightarrow 0=0$ (SP1 verificata).

Proviamo la stabilità di H rispetto al prodotto esterno. Sia

$(x,y,z)\in H \Rightarrow x-2y=0$

ed $\alpha\in\mathbb{R}$ uno scalare arbitrario.
Il prodotto $\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$
soddisfa l'equazione caratteristica di H perché

$\alpha x-2\alpha y=0 \Rightarrow \alpha(x-2y)=0$ e

per quanto detto si ha $\alpha 0=0 \Rightarrow 0=0$
(SP2 verificata).

Dunque <u>H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$</u>.

Per quanto riguarda il problema della determinazione di un sistema di generatori di H, si osservi che l'equazione caratteristica di H si può scrivere come $x=2y$

che ci dice che, se (x,y,t) è una terna di H, la terza componente, la t, è arbitraria, dunque poniamo

$$z = \alpha_1, \text{ con } \alpha_1 \in \mathbb{R};$$

inoltre tra la x e la y solo una delle due componenti può essere scelta ad arbitrio, essendo l'altra ottenuta dalla relazione $x=2y$:
poniamo per esempio

$$y = \alpha_2, \text{ con } \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

ed otteniamo $x = 2\alpha_2$.

Dunque l'elemento generico di H, in forma parametrica si scrive come

$$(2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1) \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$ Ma

$$(2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1) = (2\alpha_2, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_1) =$$

$$= \alpha_2(2,1,0) + \alpha_1(0,0,1) \text{ con } \alpha_1, \alpha_2$$

valori arbitrari. Da ciò si evince che i vettori di H sono le combinazioni lineari dei vettori del sistema

$$S = \{(2,1,0);(0,0,1)\}$$

e dunque che S è un sistema di generatori di H, in simboli $H = L(S)$ - Osserviamo infine che S è anche minimale; infatti la terna $(2,1,1)$ che è somma degli elementi di S, e quindi appartiene ad H, non può essere generata nè dal sottosistema di S $\{(2,1,0)\}$ in quanto terne siffatte:

$$\alpha(2,1,0) = (2\alpha,\alpha,0)$$

hanno tutte l'ultima componente nulla, nè dal sottosistema $\{(0,0,1)\}$ in quanto terne siffatte:

$$\alpha(0,0,1) = (0,0,\alpha)$$

hanno tutte la prima e seconda componente nulla, mentre la terna in questione, $(2,1,1)$ non possiede nessuna delle due caratteristiche precedenti. ∎