SPAZI VETTORIALI

Angelo [illegible]

(bozza per la stampa)

1.1) - SPAZIO VETTORIALE, V, SU UN CAMPO, $\mathbb{K}$.

Per definire la struttura algebrica di spazio vettoriale è necessario tenere presente i concetti di operazione interna e di operazione esterna definite in un insieme.

DEFINIZIONE 1.1.1 (di operazione interna)

Sia A un insieme non vuoto. Si dice che in A è definita una operazione (binaria) interna (indichiamola col simbolo $\perp$) se ad ogni coppia (ordinata) di elementi di A, (a_1, a_2) con a_1 e a_2 appartenenti ad A, resta associato uno e un solo elemento $a_1 \perp a_2$ di A. ∎

Dunque, un'operazione (binaria) $\perp$ definita in A ed interna ad A è un'applicazione il cui dominio è il prodotto cartesiano $A \times A$ (insieme delle coppie ordinate di elementi di A) e il cui codominio è A stesso; in simboli:

$$\perp : A \times A \to A \; .$$

DEFINIZIONE 1.1.2 (di operazione esterna)

Siano B ed A insiemi non vuoti. Si dice che in A è definita una operazione (binaria) esterna con insieme di operatori B (indichiamola col simbolo $\top$) se ad ogni coppia ordinata di prima componente un elemento di B e seconda componente un elemento di A, (b, a) con $b \in B$ ed $a \in A$, resta associato uno e un solo elemento $b \top a$ di A. ■

Un'operazione (binaria) $\top$ definita in A ed esterna ad A, con insieme di operatori B, è dunque un'applicazione il cui dominio è il prodotto cartesiano $B \times A$ (insieme delle coppie ordinate di prima componente in β e seconda componente in A) e il cui codominio è A stesso; in simboli:

$$T : \beta \times A \longrightarrow A .$$

Per i nostri scopi, è opportuno ricordare anche la nozione di campo. Un campo è un insieme in cui sono definite due operazioni interne, la somma (+) ed il prodotto (·), associative e commutative ed entrambe dotate di elemento neutro, 0 per la somma e 1 per il prodotto, e di elemento simmetrico, $-\alpha$ per la somma che è detto l'opposto di α $(\alpha + (-\alpha) = 0)$ e α^{-1}, se $\alpha \neq 0$, per il prodotto che è detto inverso di α $(\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1)$; infine in un campo il prodotto è distributivo rispetto alla somma.

Un esempio importante di campo è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali in relazione alle usuali operazioni di somma e prodotto. Altri esempi notevoli di campo sono i numeri complessi ed i numeri razionali.

DEFINIZIONE 1.1.3 (di spazio vettoriale)

Sia $\mathbb{K}$ un campo i cui elementi chiamiamo scalari. Un insieme V è detto spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, o più brevemente $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, ed i suoi elementi sono detti vettori, se in esso sono definite una operazione interna $(+)$, detta somma di vettori, ed un'operazione esterna con insieme di operatori $\mathbb{K}$, detta prodotto per uno scalare, tali che risultano verificate le seguenti (otto) proprietà:

SV1) Proprietà associativa della somma di vettori:

$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in V$ risulta $(\underline{v}_1+\underline{v}_2)+\underline{v}_3 = \underline{v}_1+(\underline{v}_2+\underline{v}_3)$.

SV2) Proprietà commutativa della somma di vettori:

$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ risulta $\underline{v}_1+\underline{v}_2 = \underline{v}_2+\underline{v}_1$.

SV3) Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma di vettori:

$\exists\, \underline{0} \in V \mid \forall \underline{v} \in V$ risulta $\underline{v}+\underline{0} = \underline{0}+\underline{v} = \underline{v}$.

SV4) Esistenza dell'opposto di ogni elemento

$\forall \underline{v} \in V,\ \exists\, \underline{v}' \in V \mid \underline{v}+\underline{v}' = \underline{v}'+\underline{v} = \underline{0}$.

SV5) Proprietà associativa del prodotto per uno scalare rispetto al prodotto di scalari:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v} \in V$ risulta $(\alpha\beta)\underline{v} = \alpha(\beta\underline{v})$.

SV6) Proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di scalari:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v} \in V$ risulta $(\alpha+\beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}$.

SV7) Proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di vettori:
$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ risulta $\alpha(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = \alpha\underline{v}_1 + \alpha\underline{v}_2$

SV8) Neutralità dell'unità scalare rispetto al prodotto per uno scalare:
$\forall \underline{v} \in V$ risulta $1\underline{v} = \underline{v}$. ∎

Si osservi che la somma di scalari e la somma di vettori sono indicate con lo stesso simbolo (+), ma sono due operazioni di natura diversa. Lo stesso dicasi per il prodotto per uno scalare e per il prodotto di scalari, per indicare i quali invece non usiamo nessun simbolo particolare. Sarà per lo più il contesto delle scritture a chiarire senza ambiguità, volta per volta, di quale opera=

zione sta parlano e quale di esse ha la precedenza sulle eventuali altre operazioni. Per esempio scritture del tipo $\alpha\underline{v}+\beta\underline{v}$ indicano che bisogna effettuare prima i due prodotti, che sono entrambi definiti in V, $\alpha\underline{v}$ ~~e~~ $\beta\underline{v}$, poi la somma anch'essa definita in V e precisamente quella tra il vettore αv col vettore $\beta\underline{v}$; invece scritture del tipo $(\alpha+\beta)\underline{v}$ indicano che la prima operazione da effettuare è la somma di scalari, $\alpha+\beta$, poi bisogna eseguire il prodotto del vettore $\underline{v}$ per lo scalare $\alpha+\beta$, in tal caso quindi la somma è definita in $\mathbb{K}$ mentre il prodotto è definito in V. Ancora, scritture del tipo $(\alpha\beta)\underline{v}$ ed $\alpha(\beta\underline{v})$ indicano due procedimenti di calcolo distinti: nel primo caso il primo prodotto da effettuare è quello definito in $\mathbb{K}$, $\alpha\beta$, poi quello definito in V; nel secondo caso prima bisogna eseguire il prodotto $\beta\underline{v}$, definito in V e poi quello del vettore $\beta\underline{v}$ per lo scalare α, ancora definito in V.

1.2) - PRIME PROPRIETÀ -

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. L'elemento neutro rispetto alla somma di vettori, $\underline{0}$, è detto <u>vettore nullo</u> e, dato che l'assioma SV3 ne afferma l'esistenza, si ha che qualsiasi spazio vettoriale è costituito da almeno il vettore nullo. Inoltre si ha:

P1) Unicità dell'elemento neutro della somma di vettori:

$$\exists!\, \underline{0} \in V \mid \forall \underline{v} \in V \Rightarrow \underline{v} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Sia $\underline{x}$ un altro elemento neutro di V, cioè sia $\underline{x} \in V \mid \forall \underline{v} \in V \Rightarrow \underline{v} + \underline{x} = \underline{v}$.

Per $\underline{v} = \underline{0}$ si ha allora $\underline{0} + \underline{x} = \underline{0}$, ma dato che $\underline{0}$ è elemento neutro risulta anche $\underline{0} + \underline{x} = \underline{x}$, quindi è $\underline{x} = \underline{0}$. ∎

P2) Unicità dell'opposto:

$$\forall \underline{v} \in V, \exists! \, \underline{v}' \in V \mid \underline{v}+\underline{v}' = \underline{v}'+\underline{v} = \underline{0}$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\underline{x}$ un altro opposto di un elemento $\underline{v}$ di V, cioè $\forall \underline{v} \in V$ sia $\underline{x} \in V \mid \underline{v}+\underline{x} = \underline{0}$. Si ha allora $\underline{x} = \underline{0} + \underline{x} = (\underline{v}'+\underline{v}) + \underline{x} = \underline{v}' + (\underline{v}+\underline{x}) =$

$= \underline{v}' + \underline{0} = \underline{v}'$. ■

P3) Legge di annullamento del prodotto:

se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\underline{v} \in V$ allora

$$\alpha \underline{v} = \underline{0} \text{ se e solo se } \alpha = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0}$$

DIMOSTRAZIONE

Si ha $\forall \underline{v} \in V$, $0\underline{v} = \underline{0}$, infatti risulta:

$$\underline{v} + 0\underline{v} = 1\underline{v} + 0\underline{v} = (1+0)\underline{v} = 1\underline{v} = \underline{v};$$

e data l'unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma di vettori è necessariamente $0\underline{v} = \underline{0}$.

Inoltre si ha $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \underline{0} = \underline{0}$, infatti $\forall \underline{v} \in V$ risulta:

$$\alpha \underline{v} + \alpha \underline{0} = \alpha(\underline{v} + \underline{0}) = \alpha \underline{v}$$

con α scalare arbitrario, ed ancora per l'unicità di $\underline{0}$ è necessariamente $\alpha\underline{0}=\underline{0}$.

Viceversa sia $\alpha\underline{v}=\underline{0}$ con $\alpha\neq 0$, allora si ha

$$\underline{v}=1\underline{v}=(\alpha\alpha^{-1})\underline{v}=(\alpha^{-1}\alpha)\underline{v}=\alpha^{-1}(\alpha\underline{v})=\alpha^{-1}\underline{0}=\underline{0}$$

cioè $\underline{v}=\underline{0}$. ■

Prima di dimostrare altre proprietà è opportuno porre le seguenti definizioni atte a chiarire il duplice significato del segno $(-)$:

DEFINIZIONE 1.2.1 (simbolo dell'opposto)

$\forall \underline{v}\in V$ poniamo $-\underline{v}:=\underline{v}'$ ■

DEFINIZIONE 1.2.2 (differenza di vettori)

$\forall \underline{v}_1,\underline{v}_2\in V$ poniamo $\underline{v}_1-\underline{v}_2:=\underline{v}_1+(-\underline{v}_2)$ ■

Possiamo allora dire che:

P4) Passaggio all'opposto:

$\forall \underline{v}\in V$ risulta $(-1)\underline{v}=-\underline{v}$

DIMOSTRAZIONE

$\forall \underline{v} \in V$ risulta $\underline{v} + (-1)\underline{v} = (1-1)\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$

e per l'unicità dell'opposto, $-\underline{v}$, si ha:

$(-1)\underline{v} = -\underline{v}$. $\blacksquare$

P5) Regola dei segni:

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v} \in V$ risulta

$$\alpha(-\underline{v}) = (-\alpha)\underline{v} = -\alpha\underline{v}$$

e $(-\alpha)(-\underline{v}) = \alpha\underline{v}$.

DIMOSTRAZIONE

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v} \in V$ risulta:

$$\alpha(-\underline{v}) = \alpha\left[(-1)\underline{v}\right] = \left[\alpha(-1)\right]\underline{v} = (-\alpha)\underline{v}$$

ed inoltre:

$$\alpha\underline{v} + (-\alpha)\underline{v} = \left[\alpha + (-\alpha)\right]\underline{v} = (\alpha-\alpha)\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$$

che per l'unicità dell'opposto porge:

$$(-\alpha)\underline{v} = -\alpha\underline{v}$$

la quale, insieme alla prima identità, significa

$$\alpha(-\underline{v}) = (-\alpha)\underline{v} = -\alpha\underline{v} .$$

La seconda regola si dimostra dalla prima per sostituzione di α con $-\alpha$ ottenendo così:

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall \underline{v} \in V, \quad (-\alpha)(-\underline{v}) = [-(-\alpha)]\underline{v},$$

ed osservando che $-(-\alpha) = \alpha$. ■

p6) Regola del trasporto:

$$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V, \exists! \, \underline{x} \in V \mid \underline{x} + \underline{v}_1 = \underline{v}_2$$

e risulta $\underline{x} = \underline{v}_2 - \underline{v}_1$.

DIMOSTRAZIONE

Dobbiamo dimostrare prima di tutto che dati due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ di V il vettore $\underline{v}_2 - \underline{v}_1$ è soluzione dell'equazione (vettoriale) $\underline{x} + \underline{v}_1 = \underline{v}_2$. Sostituendo quindi $\underline{v}_2 - \underline{v}_1$ al posto di $\underline{x}$ si ha:

$$(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) + \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \quad \text{cioè} \quad [\underline{v}_2 + (-\underline{v}_1)] + \underline{v}_1 = \underline{v}_2$$

ovvero $\underline{v}_2 + [(-\underline{v}_1) + \underline{v}_1] = \underline{v}_2$ ed infine

$\underline{v}_2 + \underline{0} = \underline{v}_2$ o meglio $\underline{v}_2 = \underline{v}_2$ e l'equazione è soddisfatta per $\underline{x} = \underline{v}_2 - \underline{v}_1$. Dimostriamo adesso che essa è unica. Sia all'uopo $\underline{x}'$ un

altro vettore di V per cui risulti $\underline{x}'+\underline{v}_1=\underline{v}_2$
allora deve essere $\underline{x}+\underline{v}_1=\underline{x}'+\underline{v}_1$ da cui, sommando
$-\underline{v}_1$ ad ambo i membri, otteniamo

$$(\underline{x}+\underline{v}_1)+(-\underline{v}_1)=(\underline{x}'+\underline{v}_1)+(-\underline{v}_1)$$ e quindi

$$\underline{x}+[\underline{v}_1+(-\underline{v}_1)]=\underline{x}'+[\underline{v}_1+(-\underline{v}_1)]$$ ovvero

$\underline{x}+\underline{0}=\underline{x}'+\underline{0}$ che vuol dire $\underline{x}=\underline{x}'$. ■

Le regole dei segni e la regola del trasporto sono molto importanti perché ci permettono di estendere il formalismo di calcolo usato per le equazioni numeriche alle equazioni vettoriali. L'unica differenza nei due casi è che per i numeri si può parlare di reciproco di un numero diverso da zero, e quindi si può introdurre l'operazione di divisione, mentre nel caso vettoriale non esistono nozioni analoghe.

ESEMPIO 1.2.1 (Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$)

Sia $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle n-ple ordinate di numeri reali

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\}$$

Se definiamo la somma di n-ple come

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

ed il prodotto per un numero reale, $\alpha \in \mathbb{R}$, come

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

allora l'insieme $\mathbb{R}^n$ rispetto a queste due operazioni è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali.

Infatti le proprietà associativa e commutativa della somma derivano banalmente dalle omonime proprietà dei numeri reale che costituiscono le componenti della n-pla. Il vettore nullo è la n-pla $(0, \dots, 0)$, il vettore opposto di $(x_1, \dots, x_n)$ è la n-pla $(-x_1, \dots, -x_n)$.

Risultano pertanto verificate le SV1, SV2, SV3 ed SV4.

E' verificata anche la proprietà associativa (SV5), infatti $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$(\alpha\beta)(x_1, \dots, x_n) = (\alpha\beta x_1, \dots, \alpha\beta x_n) = \alpha(\beta x_1, \dots, \beta x_n) =$$
$$= \alpha[\beta(x_1, \dots, x_n)].$$

Lo stesso dicasi per la doppia proprietà distributiva (SV6 ed SV7), infatti $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ risulta:

$$(\alpha+\beta)(x_1, \dots, x_n) = ((\alpha+\beta)x_1, \dots, (\alpha+\beta)x_n) =$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \dots, \alpha x_n + \beta x_n) =$$
$$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1 + \dots + \beta x_n) =$$
$$= \alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(x_1, \dots, x_n),$$

e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$\alpha[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] = \alpha(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) =$$
$$= (\alpha(x_1 + y_1) + \dots + \alpha(x_n + y_n)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n) =$$
$$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n) =$$
$$= \alpha(x_1, \dots, x_n) + \alpha(y_1, \dots, y_n).$$

Infine si ha ~~che~~ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, risulta

$1(x_1, \ldots, x_n) = (1x_1, \ldots, 1x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$

quindi anche l'ultimo assioma (SV8) è verificato.

Le operazioni di somma di n-ple e prodotto per uno scalare definite in questo modo, in seguito saranno chiamate operazioni usuali per le n-ple di numeri reali e, come dimostrato, muniscono $\mathbb{R}^n$ di struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. ■

1.3) - SOTTOSPAZI VETTORIALI -
- INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI -

Iniziamo introducendo la nozione di sottoinsieme stabile di uno spazio vettoriale.

DEFINIZIONE 1.3.1 (di sottoinsieme stabile)

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale ed H un suo sottoinsieme. H è detto <u>sottoinsieme stabile</u> di V se la somma di due qualsiasi elementi di H è ancora un elemento di H ed il prodotto di un qualsiasi elemento di H per un qualsiasi scalare è ancora un elemento di H, in simboli se:

1) $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in H \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in H$

2) $\alpha \in \mathbb{K}, \underline{v} \in H \Rightarrow \alpha \underline{v} \in H$. ■

Si osservi che se H è il sottoinsieme vuoto allora esso è stabile, in tal caso infatti sono verificate entrambe le condizioni, 1 e 2, perché, non avendo H alcun elemento, risultano falsi entrambi gli antecedenti delle implicazioni 1 e 2.

Si osservi pure che un sottoinsieme non vuoto di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è stabile se risulta munito delle operazioni di somma interna e prodotto esterno che sono le restrizioni delle operazioni definite in V. Inoltre si ha:

PROPOSIZIONE 1.3.1 (dei sottoinsiemi stabili e non vuoti)

Se V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale ed H un suo sottoinsieme stabile e non vuoto, allora H è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

DIMOSTRAZIONE

Dobbiamo far vedere che H verifica tutte le proprietà SV1 ÷ SV8 di spazio vettoriale. Per ipotesi H non è vuoto e dunque è costituito da almeno un elemento $\underline{v}$ di V. Per la condizione 2 di stabilità, anche lo elemento $0\underline{v} = \underline{0}$ vi appartiene, e quindi la SV3 è verificata. Sempre per la condizione 2, se $\underline{v}$ è un elemento di H anche l'elemento $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ appartiene ad H, e la SV4 è verificata. Per quanto riguarda la verifica delle SV1 ed SV2, si osservi che se $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono elementi di H, per la condizione 1 di stabilità, anche $\underline{v}_1+\underline{v}_2$, $\underline{v}_2+\underline{v}_1$ e quindi iterando la stessa condizione 1, anche $(\underline{v}_1+\underline{v}_2)+\underline{v}_3$ e $\underline{v}_1+(\underline{v}_2+\underline{v}_3)$ appartengono tutti ad H; queste somme appartengono anche a V, perché $H \subseteq V$, e quindi verificano le SV1 ed SV2, in cui compaiono. Analoga=mente, se α e β sono scalari e $\underline{v}$, $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ elementi di H, per la condizione 1 e la condizione 2 di stabilità, anche $1\underline{v}$, $\alpha\underline{v}$, $\alpha\underline{v}_1$, $\alpha\underline{v}_2$, $(\alpha\beta)\underline{v}$, $\alpha(\beta\underline{v})$, $(\alpha+\beta)\underline{v}$ ed $\alpha(\underline{v}_1+\underline{v}_2)$ appartengono ad H, e siccome tutti questi prodotti sono anche elementi di V ne segue che pure le SV5 ÷ SV8 in cui compaiono sono verificate. ■

DEFINIZIONE 1.3.2 (di sottospazio vettoriale)
Dicesi sottospazio vettoriale di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V un sottoinsieme W di V il quale sia $\mathbb{K}$-spazio vet=toriale rispetto alle medesime operazioni di V. ■

Un sottospazio vettoriale W di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, in quanto $\mathbb{K}$-spazio vettoriale esso stesso, non può essere vuoto perché contiene almeno il vettore nullo ed inoltre è un sottoinsieme stabile di V. Viceversa la proposizione 1.3.1, alla luce della definizione 1.3.2, assicura che un sottoinsieme stabile e non vuoto di V è sottospazio vettoriale di V, ed in particolare quindi contiene almeno il vettore nullo. Allora risulta dimostrata la seguente:

PROPOSIZIONE 1.3.2 (Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme di uno spazio vettoriale sia sottospazio)

Un sottoinsieme W di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è un sottospazio di V se e solo se

SP0) $\underline{0} \in W$

SP1) $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$

SP2) $\alpha \in \mathbb{K}, \underline{w} \in W \Rightarrow \alpha \underline{w} \in W$.

■

Si noti, infine, che un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V possiede (sempre) almeno due sottospazi, essi sono:

- lo spazio vettoriale V stesso, detto <u>sottospazio improprio</u>, mentre tutti gli altri sottospazi sono detti <u>sottospazi propri</u>.

- il sottospazio costituito solo dal vettore nullo, $\{\underline{0}\}$, detto <u>sottospazio nullo</u>.

Si osservi pure che un sottospazio non è mai vuoto anche quando è il sottospazio nullo, e che il vettore nullo appartiene a tutti i sottospazi di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Naturalmente si ha che se V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, W_1 ne è un sottospazio e W_2 è un sottospazio di W_1, allora W_2 è anche sottospazio di V.

Studiamo adesso l'intersezione di sottospazi.

PROPOSIZIONE 1.3.3 (dell'intersezione di sottospazi)

Sia $\{V_i\}_{i=1,\dots,n}$ una famiglia non vuota ($n \geq 1$) di sottospazi di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Allora anche l'insieme intersezione

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i \text{ è un sottospazio di } V.$$

DIMOSTRAZIONE

Dobbiamo dimostrare che l'insieme $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ verifica le propietà SP0, SP1 ed SP3 che caratterizzano i sottospazi vettoriali.
Essendo ciascuno degli insiemi V_i sottospazi vettoriali, per la SP0, ognuno di essi contiene il vettore nullo, quindi anche la loro intersezione $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ contiene il vettore nullo. Inoltre, se $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono elementi di $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ si ha che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ appartengono a ciascuno dei sottospazi V_i i quali, per la SP1, contengono

tutti anche la somma $\underline{v}_1+\underline{v}_2$, quindi la somma $\underline{v}_1+\underline{v}_2$ appartiene anche all'intersezione $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$.

Analogamente, se α è uno scalare, $\alpha \in \mathbb{K}$, e $\underline{v}$ un elemento di $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$, allora $\underline{v}$ appartiene a ciascuno dei sottospazi V_i i quali, per SP2, contengono tutti anche il prodotto $\alpha\underline{v}$, quindi il prodotto $\alpha\underline{v}$ appartiene anche all'intersezione $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Concludiamo allora che l'insieme intersezione $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ di una famiglia non vuota di sottospazi di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, soddisfando le condizioni caratterizzanti i sottospazi vettoriali, è a sua volta un sottospazio vettoriale di V. ∎

ESEMPIO 1.3.1

Sappiamo, dall'esempio 1.2.1 per $n=3$, che l'insieme $\mathbb{R}^3$, cioè l'insieme delle terne ordinate di numeri reali, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto definite in $\mathbb{R}^3$, è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Consideriamo adesso il sottoinsieme H di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$$

Ovviamente in H non ci sono tutte le terne di numeri reali, ad esempio la terna $(1,1,1)$ non appartiene ad H inquanto essa non verifica l'equazione caratteristica di H, cioè la

$x+y-z=0$, infatti per $x=1$, $y=1$ e $z=1$ si ha $1+\cancel{1}-\cancel{1}=0 \Rightarrow 1=0$ ASSURDO.

L'insieme H è quindi una parte propria di $\mathbb{R}^3$, in simboli $H \subset \mathbb{R}^3$.

Vediamo adesso se H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Occorre per ciò constatare se H verifica le tre proprietà caratterizzanti i sottospazi vettoriali, cioè le SP0, SP1 ed SP2 della proposizione 1.3.2. All'uopo osserviamo subito che il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, cioè la terna $(0,0,0)$, appartiene ad H perchè esso soddisfa l'equazione caratteristica di H; infatti per $x=0$, $y=0$ e $z=0$ la $x+y-z=0$ diventa $0+0-0=0$ e cioè $0=0$ IDENTITÀ VERA. Dunque la SP0 è verificata. Per verificare la stabilità di H rispetto alle due operazioni definite in $\mathbb{R}^3$, cioè per verificare le SP1 ed SP2, dobbiamo far vedere che se $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$ sono due elementi di H ed $\alpha \in \mathbb{R}$ uno scalare arbitrario allora anche il vettore

$$\underline{u}+\underline{v}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$

ed il vettore

$$\alpha\underline{u}=(\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1)$$

appartengono ad H. Adesso da $\underline{u}\in H$ segue che $x_1+y_1-z_1=0$ ed da $\underline{v}\in H$ segue che $x_2+y_2-z_2=0$ perchè sia $\underline{u}$ che $\underline{v}$ devono soddisfare l'equazione caratteristica di H, e vediamo se anche la loro somma, $\underline{u}+\underline{v}$, soddisfa l'equazione caratteristica, cioè vediamo se l'espressione per la somma

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=0$$

si riduce ad una identità vera. Da questa si ha

$$(x_1+y_1-z_1)+(x_2+y_2-z_2)=0$$

e per quanto detto poc'anti $0+0=0$ cioè $0=0$.

La SP1 è dunque verificata. Facciamo ora vedere che anche il prodotto, $\alpha\underline{u}$, soddisfa l'equazione caratteristica, cioè vediamo se l'espressione per il prodotto,

$$\alpha x_1+\alpha y_1-\alpha z_1=0,$$

si riduce ad una identità vera. Da quest'ultima si ha:

$$\alpha(x_1+y_1-z_1)=0$$

e per quanto detto in precedenza $\alpha 0=0$ cioè $0=0$.

Anche la SP2 è verificata. $\blacksquare$

ESERCIZIO 1.3.1

Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali

$$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y \geq 0\}$$

$$H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$$

$$H_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge x + 2y = 0\}$$

Ci viene chiesto di verificare se H_1 è un sottospazio vettoriale. Il vettore nullo $(0,0,0)$ appartiene ad H_1 perché esso verifica la rispettiva equazione caratteristica, $0^2 + 0 \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0$; al momento non possiamo concludere che H_1 è un sottospazio, ma dobbiamo indagare ulteriormente. Verifichiamo se H_1 è stabile rispetto alla somma (SP1). I vettori

$$\underline{u} = (-1,-1,1) \text{ e } \underline{v} = (1,-1,1)$$

appartengono ad H_1 perché entrambi verificano

l'equazione caratteristica di H_1, $(-1)^2-1\geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1-1\geq 0 \Rightarrow 0\geq 0$ e $1^2-1\geq 0 \Rightarrow 1-1\geq 0 \Rightarrow 0\geq 0$,
però il vettore

$$\underline{u}+\underline{v}=(0,-2,2)$$

non appartiene ad H_1 inquanto esso non verifica l'equazione caratteristica di H_2, $0^2-2\geq 0 \Rightarrow -2\geq 0$. Concludiamo dicendo che H_2, non verificando la condizione SP1, non è un sottospazio vettoriale.

Ci viene chiesto di verificare se H_2 è un sottospazio vettoriale. Osserviamo, all'uopo, che il vettore nullo $(0,0,0)$ non appartiene ad H_2 perché esso non verifica l'equazione caratteristica di H_2, $0+1=0 \Rightarrow 1=0$. Concludiamo dicendo che H_2 non è un sottospazio vettoriale perché esso non verifica la SP0.

Ci viene chiesto, infine, di verificare se H_3 è un sottospazio vettoriale. Il vettore nullo $(0,0,0)$ appartiene ad H_3 perché $0-0=0 \wedge 0+2\cdot 0=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0=0 \wedge 0=0$, al momento non possiamo concludere, dobbiamo indagare ancora.

Verifichiamo la stabilità di H_3 rispetto alle operazioni di somma interna e prodotto per uno scalare (reale). Supponiamo che

$$\underline{u} = (x_1, y_1, z_1) \text{ e } \underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

appartengano ad H_3 e $\alpha \in \mathbb{R}$, dunque risulta

$\underline{u} \in H_3 \Rightarrow x_1 - y_1 = 0 \wedge x_1 + 2y_1 = 0$

$\underline{v} \in H_3 \Rightarrow x_2 - y_2 = 0 \wedge x_2 + 2y_2 = 0$

Calcoliamo adesso la somma

$$\underline{u} + \underline{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

e vediamo se essa soddisfa alle equazioni cartesiane di H_3. Si ha per la prima equazione:

$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 - y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0$ e quindi per la condizione $\underline{v}, \underline{u} \in H_3$ si ha: $0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$, che dimostra che la prima equazione è soddisfatta dalla somma $\underline{u} + \underline{v}$. Per la seconda equazione si ha:

$(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)=0 \Rightarrow x_1+x_2+2y_1+2y_2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1+2y_1)+(x_2+2y_2)=0 \Rightarrow$ e quindi per la condizione $\underline{u},\underline{v} \in H_3$ si ha $0+0=0 \Rightarrow 0=0$, cioè anche la seconda equazione caratteristica di H_3 è soddisfatta dalla somma $\underline{u}+\underline{v}$ e dunque H_3 è stabile rispetto alla somma interna (SP1 verificata).

Calcoliamo adesso il prodotto

$$\alpha\underline{u}=\alpha(x_1,y_1,z_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)$$

e vediamo se esso soddisfa alle equazioni caratteristiche di H_3. Si ha per la prima:

$\alpha x_1-\alpha y_1=0 \Rightarrow \alpha(x_1-y_1)=0$ che per la condizione $\underline{u}\in H_3$ diventa $\alpha 0=0 \Rightarrow 0=0$.

Si ha per la seconda equazione caratteristica:

$\alpha x_1+2\alpha y_1=0 \Rightarrow \alpha(x_1+2y_1)=0$ che per la condizione $\underline{u}\in H_3$ diventa $\alpha 0=0 \Rightarrow 0=0$.

La stabilità di H_3 rispetto alle due operazioni è provata e possiamo concludere che H_3 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 1.3.2

Dire quali dei seguenti sottoinsiemi dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali. Facciamo notare esplicitamente che il campo associato è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

$$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\} \cup \{(0,0,0)\}$$

$$H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{Q}\}$$

$$H_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\} \cup \{0,0,0\}$$

$$H_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$$

Ci viene chiesto se H_1 è sottospazio vettoriale.

Dalla stessa definizione di H_1 segue che $(0,0,0) \in H_1$ quindi H_1 verifica la SP0.

Oltre che dalla terna nulla, H_1 è costituito da tutte le terne del tipo $(x,y,1)$ cioè dalle terne aventi l'ultima componente uguale a 1. Si vede subito, allora, che né la sp1 né la sp2 sono verificate. Infatti per $\underline{u}, \underline{v}$ elt. cioè per $\underline{u} = (x_1, y_1, 1)$ e $\underline{v} = (x_2, y_2, 1)$ si ha

$$\underline{u} + \underline{v} = (x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ 2)$$

e dunque $\underline{u} + \underline{v} \notin H_1$. Inoltre per $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha = 2$ si ha

$$2\underline{u} = 2(x_1, y_1, 1) = (2x_1, 2y_1, 2)$$ e

dunque $2\underline{u} \notin H_1$. Concludiamo che

<u>H_1 non è sottospazio vettoriale</u>

Ci viene chiesto se H_2 è un sottospazio vettoriale. Notiamo esplicitamente che H_2 è l'insieme di tutte le terne ordinate a componenti razionali $x, y, z \in \mathbb{Q}$, e siccome 0 è un numero razionale la terna nulla $(0,0,0)$ appartiene ad H_2; dunque la sp0 è verificata. Anche la sp1 è verificata dal momento che la somma di due terne a componenti razionali è ancora una terna a componenti razionali. Non così, invece, risulta per il prodotto esterno. Infatti, ricordando che $\mathbb{R}^3$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali, si ha che il prodotto di una terna a componenti razionali per un numero reale non (sempre) è una terna a componenti razionali: per esempio

$$\sqrt{2}\,(1,1,1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin H_2 .$$

La condizione SP2 non è quindi verificata e H_2 non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Ci viene chiesto se H_3 è un sottospazio vettoriale. Notiamo subito che la condizione SP1 non è verificata:

$$(1,1,1) \in H_3 \quad e \quad (-1,1,1) \in H_3$$

$$\text{ma} \quad (1,1,1)+(-1,1,1) = (0,2,2) \notin H_3 ;$$

dunque H_3 non è sottospazio vettoriale.

Ci viene chiesto se H_4 è sottospazio vettoriale. La SP0 è verificata, infatti $(0,0,0) \in H_4$ in quanto esso soddisfa all'equazione caratteristica: $0+0=0 \Rightarrow 0=0$.

La SP1 è verificata:

$$\underline{u}+\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

e siccome da $x_1+y_1=0$ (appartenenza di (x_1,y_1,z_1) ad H_4) e da $x_2+y_2=0$ (appartenenza di (x_2,y_2,z_2) ad H_4) segue che:

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=0+0=0$$

si ha $\quad (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)\in H_4$.

Anche la condizione SP2 è verificata. Infatti se $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\underline{u}=\alpha(x_1,y_1,z_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)$ soddisfa all'equazione caratteristica di H_4 in quanto risulta che: $\alpha x_1+\alpha y_1=0 \Rightarrow \alpha(x_1+y_1)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha 0=0 \Rightarrow 0=0$. Concludiamo dicendo che H_4 è un sottospazio vettoriale.

ESERCIZIO 1.3.3 (Proposto)

Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$ sono sottospazi vettoriali.

$$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy \geq 0\}$$

$$H_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x-y)(z-t) = 0\}$$

$$H_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$$

$$H_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1\}$$

$$H_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\} - \{(2,2,0)\}$$

$$H_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \wedge x - y = 0\}$$

$$H_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0x + 0y + 0z = 0\}$$

$$H_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \wedge x + y = 0 \wedge x - y = 0\}$$