SPAZI VETTORIALI

Angelo de Luca

(bozza per la stampa)

1.1) - SPAZIO VETTORIALE, V, SU UN CAMPO, $\mathbb{K}$.

Per definire la struttura algebrica di spazio vettoriale è necessario tenere presente i concetti di operazione interna e di operazione esterna definite in un insieme.

DEFINIZIONE 1.1.1 (di operazione interna)

Sia A un insieme non vuoto. Si dice che in A è definita <u>una operazione</u> (binaria) <u>interna</u> (indichiamola col simbolo $\perp$) se ad ogni coppia (ordinata) di elementi di A, (a_1, a_2) con a_1 e a_2 appartenenti ad A, resta associato uno e un solo elemento $a_1 \perp a_2$ di A. ∎

Dunque, un'operazione (binaria) $\perp$ definita in A ed interna ad A è un'applicazione il cui dominio è il prodotto cartesiano $A \times A$ (insieme delle coppie ordinate di elementi di A) e il cui codominio è A stesso; in simboli:

$$\perp : A \times A \longrightarrow A .$$

DEFINIZIONE 1.1.2 (di operazione esterna)

Siano B ed A insiemi non vuoti. Si dice che in A è definita una operazione (binaria) esterna con insieme di operatori B (indichiamola col simbolo $\top$) se ad ogni coppia ordinata di prima componente un elemento di B e seconda componente un elemento di A, (b, a) con $b \in B$ ed $a \in A$, resta associato uno e un solo elemento $b \top a$ di A. ■

Un'operazione (binaria) $\top$ definita in A ed esterna ad A, con insieme di operatori B, è dunque un'applicazione il cui dominio è il prodotto cartesiano $B \times A$ (insieme delle coppie ordinate di prima componente in B e seconda componente in A) e il cui codominio è A stesso; in simboli:

$$T : B \times A \longrightarrow A .$$

Per i nostri scopi, è opportuno ricordare anche la nozione di campo. Un campo è un insieme in cui sono definite due operazioni interne, la somma (+) ed il prodotto (·), associative e commutative ed entrambe dotate di elemento neutro, 0 per la somma e 1 per il prodotto, e di elemento simmetrico, $-\alpha$ per la somma che è detto l'opposto di α $(\alpha + (-\alpha) = 0)$ e α^{-1}, se $\alpha \neq 0$, per il prodotto che è detto inverso di α $(\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1)$; infine in un campo il prodotto è distributivo rispetto alla somma.

Un esempio importante di campo è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali in relazione alle usuali operazioni di somma e prodotto. Altri esempi notevoli di campo sono i numeri complessi ed i numeri razionali.

DEFINIZIONE 1.1.3 (di spazio vettoriale)

Sia $\mathbb{K}$ un campo i cui elementi chiamiamo scalari. Un insieme V è detto spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, o più brevemente $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, ed i suoi elementi sono detti vettori, se in esso sono definite una operazione interna $(+)$, detta somma di vettori, ed un'operazione esterna con insieme di operatori $\mathbb{K}$, detta prodotto per uno scalare, tali che risultano verificate le seguenti (otto) proprietà:

SV1) Proprietà associativa della somma di vettori:

$$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in V \text{ risulta } (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3).$$

SV2) Proprietà commutativa della somma di vettori:

$$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \text{ risulta } \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1.$$

SV3) Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma di vettori:

$$\exists\, \underline{0} \in V \mid \forall \underline{v} \in V \text{ risulta } \underline{v} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v} = \underline{v}.$$

SV4) Esistenza dell'opposto di ogni elemento

$$\forall \underline{v} \in V,\ \exists\, \underline{v}' \in V \mid \underline{v} + \underline{v}' = \underline{v}' + \underline{v} = \underline{0}.$$

SV5) Proprietà associativa del prodotto per uno scalare rispetto al prodotto di scalari:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v} \in V$ risulta $(\alpha\beta)\underline{v} = \alpha(\beta\underline{v})$.

SV6) Proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di scalari:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v} \in V$ risulta $(\alpha+\beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}$.

SV7) Proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di vettori:
$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ risulta $\alpha(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = \alpha\underline{v}_1 + \alpha\underline{v}_2$

SV8) Neutralità dell'unità scalare rispetto al prodotto per uno scalare:
$\forall \underline{v} \in V$ risulta $1\underline{v} = \underline{v}$.

$\blacksquare$

Si osservi che la somma di scalari e la somma di vettori sono indicate con lo stesso simbolo (+), ma sono due operazioni di natura diversa. Lo stesso dicasi per il prodotto per uno scalare e per il prodotto di scalari, per indicare i quali invece non usiamo nessun simbolo particolare. Sarà per lo più il contesto delle scritture a chiarire senza ambiguità, volta per volta, di quale opera=

zione sta parlano e quale di esse ha la precedenza sulle eventuali altre operazioni. Per esempio scritture del tipo $\alpha \underline{v} + \beta \underline{v}$ indicano che bisogna effettuare prima i due prodotti, che sono entrambi definiti in V, $\alpha \underline{v}$ ~~ed~~ $\beta \underline{v}$, poi la somma anch'essa definita in V e precisamente quella tra il vettore αv col vettore $\beta \underline{v}$; invece scritture del tipo $(\alpha+\beta)\underline{v}$ indicano che la prima operazione da effettuare è la somma di scalari, $\alpha+\beta$, poi bisogna eseguire il prodotto del vettore $\underline{v}$ per lo scalare $\alpha+\beta$, in tale caso quindi la somma è definita in $\mathbb{K}$ mentre il prodotto è definito in V. Ancora, scritture del tipo $(\alpha\beta)\underline{v}$ ed $\alpha(\beta\underline{v})$ indicano due procedimenti di calcolo distinti: nel primo caso il primo prodotto da effettuare è quello definito in $\mathbb{K}$, $\alpha\beta$, poi quello definito in V; nel secondo caso prima bisogna eseguire il prodotto $\beta\underline{v}$, definito in V e poi quello del vettore $\beta\underline{v}$ per lo scalare α, ancora definito in V.

1.2) - PRIME PROPRIETÀ -

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. L'elemento neutro rispetto alla somma di vettori, $\underline{0}$, è detto <u>vettore nullo</u> e, dato che l'assioma SV3 ne afferma l'esistenza, si ha che qualsiasi spazio vettoriale è costituito da almeno il vettore nullo. Inoltre si ha:

P1) Unicità dell'elemento neutro della somma di vettori:

$$\exists!\, \underline{0} \in V \mid \forall \underline{v} \in V \Rightarrow \underline{v} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Sia $\underline{x}$ un altro elemento neutro di V, cioè sia $\underline{x} \in V \mid \forall \underline{v} \in V \Rightarrow \underline{v} + \underline{x} = \underline{v}$.

Per $\underline{v} = \underline{0}$ si ha allora $\underline{0} + \underline{x} = \underline{0}$, ma dato che $\underline{0}$ è elemento neutro risulta anche $\underline{0} + \underline{x} = \underline{x}$, quindi è $\underline{x} = \underline{0}$. ∎

P2) Unicità dell'opposto:

$$\forall \underline{v} \in V, \exists! \underline{v}' \in V \mid \underline{v}+\underline{v}'=\underline{v}'+\underline{v}=\underline{0}$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\underline{x}$ un altro opposto di un elemento $\underline{v}$ di V, cioè $\forall \underline{v} \in V$ sia $\underline{x} \in V \mid \underline{v}+\underline{x}=\underline{0}$. Si ha allora $\underline{x}=\underline{0}+\underline{x}=(\underline{v}'+\underline{v})+\underline{x}=\underline{v}'+(\underline{v}+\underline{x})=$
$=\underline{v}'+\underline{0}=\underline{v}'$. ■

P3) Legge di annullamento del prodotto:

se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\underline{v} \in V$ allora

$\alpha \underline{v}=\underline{0}$ se e solo se $\alpha=0$ oppure $\underline{v}=\underline{0}$

DIMOSTRAZIONE

Si ha $\forall \underline{v} \in V$, $0\underline{v}=\underline{0}$, infatti risulta:

$$\underline{v}+0\underline{v}=1\underline{v}+0\underline{v}=(1+0)\underline{v}=1\underline{v}=\underline{v};$$

e data l'unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma di vettori è necessariamente $0\underline{v}=\underline{0}$.

Inoltre si ha $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha\underline{0}=\underline{0}$, infatti $\forall \underline{v} \in V$ risulta:

$$\alpha\underline{v}+\alpha\underline{0}=\alpha(\underline{v}+\underline{0})=\alpha\underline{v}$$

con α scalare arbitrario, ed ancora per l'unicità di $\underline{0}$ è necessariamente $\alpha\underline{0}=\underline{0}$.

Viceversa sia $\alpha\underline{v}=\underline{0}$ con $\alpha\neq 0$, allora si ha

$$\underline{v} = 1\underline{v} = (\alpha\alpha^{-1})\underline{v} = (\alpha^{-1}\alpha)\underline{v} = \alpha^{-1}(\alpha\underline{v}) = \alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0}$$

cioè $\underline{v}=\underline{0}$. ■

Prima di dimostrare altre proprietà è opportuno porre le seguenti definizioni atte a chiarire il duplice significato del segno $(-)$:

DEFINIZIONE 1.2.1 (simbolo dell'opposto)

$\forall \underline{v}\in V$ poniamo $-\underline{v} := \underline{v}'$ ■

DEFINIZIONE 1.2.2 (differenza di vettori)

$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ poniamo $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 := \underline{v}_1 + (-\underline{v}_2)$ ■

Possiamo allora dire che:

P4) Passaggio all'opposto:

$\forall \underline{v}\in V$ risulta $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$

DIMOSTRAZIONE

$\forall \underline{v} \in V$ risulta $\underline{v} + (-1)\underline{v} = (1-1)\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$

e per l'unicità dell'opposto, $-\underline{v}$, si ha:

$(-1)\underline{v} = -\underline{v}$. ■

P5) Regola dei segni:

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v} \in V$ risulta

$$\alpha(-\underline{v}) = (-\alpha)\underline{v} = -\alpha\underline{v}$$

e $(-\alpha)(-\underline{v}) = \alpha\underline{v}$.

DIMOSTRAZIONE

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{v} \in V$ risulta:

$$\alpha(-\underline{v}) = \alpha[(-1)\underline{v}] = [\alpha(-1)]\underline{v} = (-\alpha)\underline{v}$$

ed inoltre:

$$\alpha\underline{v} + (-\alpha)\underline{v} = [\alpha + (-\alpha)]\underline{v} = (\alpha-\alpha)\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$$

che per l'unicità dell'opposto porge:

$$(-\alpha)\underline{v} = -\alpha\underline{v}$$

la quale, insieme alla prima identità, significa

$$\alpha(-\underline{v}) = (-\alpha)\underline{v} = -\alpha\underline{v} .$$

La seconda regola si dimostra dalla prima per sostituzione di α con $-\alpha$ ottenendo così:

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall \underline{v} \in V, \quad (-\alpha)(-\underline{v}) = [-(-\alpha)]\underline{v},$$

ed osservando che $-(-\alpha) = \alpha$. ■

P6) Regola del trasporto:

$$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V, \ \exists! \, \underline{x} \in V \mid \underline{x} + \underline{v}_1 = \underline{v}_2$$

e risulta $\underline{x} = \underline{v}_2 - \underline{v}_1$.

DIMOSTRAZIONE

Dobbiamo dimostrare prima di tutto che dati due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ di V il vettore $\underline{v}_2 - \underline{v}_1$ è soluzione dell'equazione (vettoriale) $\underline{x} + \underline{v}_1 = \underline{v}_2$. Sostituendo quindi $\underline{v}_2 - \underline{v}_1$ al posto di $\underline{x}$ si ha:

$$(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) + \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \quad \text{cioè} \quad [\underline{v}_2 + (-\underline{v}_1)] + \underline{v}_1 = \underline{v}_2$$

ovvero $\underline{v}_2 + [(-\underline{v}_1) + \underline{v}_1] = \underline{v}_2$ ed infine

$\underline{v}_2 + \underline{0} = \underline{v}_2$ o meglio $\underline{v}_2 = \underline{v}_2$ e l'equazione è soddisfatta per $\underline{x} = \underline{v}_2 - \underline{v}_1$. Dimostriamo adesso che essa è unica. Sia all'uopo $\underline{x}'$ un

altro vettore di V per cui risulti $\underline{x}'+\underline{v}_1=\underline{v}_2$
allora deve essere $\underline{x}+\underline{v}_1=\underline{x}'+\underline{v}_1$ da cui, sommando $-\underline{v}_1$ ad ambo i membri, otteniamo

$$(\underline{x}+\underline{v}_1)+(-\underline{v}_1)=(\underline{x}'+\underline{v}_1)+(-\underline{v}_1)$$ e quindi

$$\underline{x}+[\underline{v}_1+(-\underline{v}_1)]=\underline{x}'+[\underline{v}_1+(-\underline{v}_1)]$$ ovvero

$$\underline{x}+\underline{0}=\underline{x}'+\underline{0}$$ che vuol dire $\underline{x}=\underline{x}'$. ■

Le regole dei segni e la regola del trasporto sono molto importanti perché ci permettono di estendere il formalismo di calcolo usato per le equazioni numeriche alle equazioni vettoriali. L'unica differenza nei due casi è che per i numeri si può parlare di reciproco di un numero diverso da zero, e quindi si può introdurre l'operazione di divisione, mentre nel caso vettoriale non esistono nozioni analoghe.