Angelo De Luna

TEORIA

DEGLI

INSIEMI

E

NUMERI TRANSFINITI

(CON FONDAMENTI
DI LOGICA FORMALE)

-dla-

Indice

Capitolo 6

Capitolo 7

Appendice

Indice analitico

PREFAZIONE

La Teoria degli Insiemi (T.d.I.) sarà sviluppata, essenzialmente, in modo assiomatico. L'esposizione, tuttavia, pur nel rispetto del rigore logico che necessariamente attiene ad una trattazione di tipo formale, sarà duttile, semplice e, talvolta, persino discorsiva. Si è dato volutamente ampio spazio a commenti, esempi e spiegazioni allo scopo di favorire, fin dall'inizio, una efficace e chiara comprensione dei concetti fondamentali della T.d.I. che sono, in ultima analisi, quelli su cui si fonda la matematica moderna (la qual cosa non trova posto in trattazioni completamente formalizzate); nello stesso tempo, però, non si è lasciato scadere il rigore delle definizioni e la precisione delle deduzioni, tipici del metodo assiomatico (ciò non è riscontrabile, invece, in tutte le trattazioni elementari sugli insiemi). Ne scaturisce, così, una teoria degli insiemi, che potremmo definire semi-formale, la quale funge da collegamento tra il momento semantico e quello sintattico, tra il significato e la regola, tra il contenuto e la forma, colmando in tal modo (si spera) una lacuna didattica del settore.

Oltre, dunque, alla formalizzazione precisa degli assiomi, sarà esposta nel corpo principale del testo la versione "*ingenua*" della T.d.I: ciò produrrà inevitabili ripetizioni che tuttavia non danno mai adito a confusione. Dette ridondanze, anzi, torneranno a tutto vantaggio del Lettore perché, così, Egli avrà modo di giustificare sul piano intuitivo l'introduzione del tipo di assiomi posti alla base della T.d.I.. In effetti, volendo semplificare alquanto, si può affermare che lo scopo del presente lavoro è proprio quello di fornire uno strumento, credo efficace, per l'apprendimento e la giustificazione del linguaggio formale logico-insiemistico utilizzando tutta la potenza espressiva e persuasiva dell'intuizione e del buon senso.

L'approccio intuitivo alla T.d.I., che va sotto il nome di *Teoria Ingenua degli Insiemi*, risale a Georg Cantor (1845-1918), e, come è noto, da luogo a paradossi e circoli viziosi che, a lungo, hanno tenuto impegnati i matematici durante la cosiddetta *Crisi dei Fondamenti della Matematica*. Per contro, tutte le antinomie derivanti dalla trattazione ingenua sono state definitivamente e compiutamente eliminate dalle rigorose assiomatizzazioni formalizzate, delle quali la più accreditata, su cui lavoreremo costantemente nel seguito, è *l'Assiomatica di Zermelo-Fraenkel* (ZF). Oggi si può affermare che tutta la matematica, ad eccezione della *teoria delle funzioni ricorsive* e poche altre questioni di *matematica non-zermeliana*, si fonda sulla (e deriva dalla) T.d.I. di Zermelo-Fraenkel inquadrata nell'ambito linguistico logico-formale dei *predicati del primo ordine con uguaglianza*. Nella presente esposizione, tra l'altro, si evidenzieranno le suddette antinomie discutendo in forma chiusa la loro eliminazione.

L'obiettivo della T.d.I., non poco ambizioso, è quello di fondare tutta la matematica sul concetto di insieme, in modo però autosufficiente, vale a dire senza l'ausilio di altre nozioni matematiche; anzi, ogni altra nozione matematica deve discendere, per definizioni esplicite, dal concetto di insieme, utilizzando la logica dei predicati quale unico strumento di deduzione. Si definiranno, pertanto, le *relazioni* e, quindi, le *funzioni* in termini di insiemi, pervenendo, sempre utilizzando solo insiemi e relazioni tra insiemi, alla nozione di *numero ordinale* (*transfinito*) e di *numero cardinale* (*transfinito*). Si discuteranno, inoltre, importanti temi sull'infinito matematico affrontando e risolvendo delicate questioni, come *l'Assioma di Scelta*, *l'Ipotesi del Continuo*, *il Principio di Induzione*, ecc.; nel fare ciò emergerà, tra l'altro e con maggior forza, l'importanza e l'indispensabilità del ricorso alla formalizzazione della T.d.I. e quindi, in ultima istanza, alla *Logica Formale*.

Il testo è strutturato, come già accennato, in modo da consentire varie possibili letture a diversi livelli di astrazione via via crescente: avendo incluso la versione ingenua della teoria nel corpo principale, mentre gli approfondimenti e l'assiomatizzazione sono trattati in note di fine paragrafo. Ad argomenti caratterizzati da una specificità ulteriore, invece, sono dedicati i complementi a fine capitolo, nei quali, tra l'altro, sono esposti gli elementi di logica proposizionale e di logica predicativa del primo ordine, per arrivare così alla dimostrazione del *Teorema di Completezza della logica predicativa* già dopo i primissimi capitoli. In appendice di volume, infine, sono introdotti i *Modelli* e la nozione più avanzata di *Classe*.

Pro veritate, è doveroso segnalare al Lettore che la stesura del presente volume, sui principi logici e concettuali che stanno alla base della matematica moderna, è stata realizzata, data l'importanza degli argomenti trattati, attingendo costantemente alle seguenti autorevoli fonti:

[1] Gabriele Lolli – *Dagli insiemi ai numeri* –
Bollati Boringhieri (1994)

[2] Gabriele Lolli – *Introduzione alla logica formale* –
il Mulino (1991)

[3] Gabriele Lolli – *Teoria assiomatica degli insiemi* –
Bollati Boringhieri (1974)

[4] Hao Wang – *Dalla Matematica alla Filosofia* –
Bollati Boringhieri (1974)

[5] Paolo Freguglia – *L'algebra della logica* –
Editori Riuniti (1978)

[6] Tullio Viola – *Introduzione alla teoria degli insiemi* –
Bollati Boringhieri (1979)

In particolare, si è fatto uso massiccio, talvolta persino pedissequo, dei mirabili lavori, [1] e [2], del prof. Lolli, con la chiara intenzione di non alterare la brillante esposizione di molti passaggi delicati in essi contenuti. Per lo stesso motivo, quando si è ritenuto utile trattare alcuni temi soprattutto dal punto di vista filosofico ed antropologico, si sono riportati testualmente non pochi frammenti tratti dalla magnifica opera del prof. Wang, [4]. Per la teoria ingenua, invece, ho attinto prevalentemente dal sintetico ma ottimo volume del prof. Viola, [6]. La parte restante, consistente nella rielaborazione e messa a punto di molte dimostrazioni, nonché il coordinamento delle fonti, è frutto della mia personale esperienza di studio.

Nel fare ciò, però, non ho chiesto il permesso né agli Autori né agli Editori; per contro (considerando che l'uso del presente volume, redatto in origine con mezzi proprietari ed in numero limitatissimo di copie, è destinato esclusivamente ai gruppi ristretti di studio da cui mi è pervenuta la richiesta, senza alcuna finalità di lucro) spero che gli effetti di questa omissione, dovuta a motivi essenzialmente contingenti, siano ben ripagati dall'invito alla lettura (e quindi all'acquisto) dei suddetti lavori, davvero indispensabili.

Campagna, 1 marzo 2005 - Angelo De Luna -

Angelo De Luna

Capitolo 1

PRECISAZIONE E FORMALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI INSIEME

1.1 Prime Nozioni

Si assumeranno come primitive le nozioni di *insieme*(1), di *ente*(2), e di *proprietà*(3).

Se il simbolo S(4) denota un insieme gli enti che costituiscono S si dicono *elementi* di S.

Se i simboli x e y denotano enti, la scrittura $x=y$ indica che x e y rappresentano il medesimo ente, e in questo caso si dice che x è *uguale* a y. Per indicare invece che x e y non rappresentano lo stesso ente si usa la scrittura $x \neq y$ e si dice che x è *diverso*(5) da y.

Sia S un insieme. Per indicare che un ente x è un *elemento* di S si usa il simbolo

$$x \in S$$

e in questo caso si dice anche che x *appartiene*[6] ad S. Per denotare invece che l'ente x non è un elemento di S si usa il simbolo

$$x \notin S$$

e si dice che x *non appartiene* ad S.

Se S e T sono insiemi, la scrittura

$$S=T$$

denota che S e T sono costituiti dagli stessi elementi[7], mentre

$$S \neq T$$

denota che S e T non sono costituiti dagli stessi elementi, cioè che esiste un elemento di S che non è elemento di T oppure un elemento di T che non è elemento di S.

Se S è un insieme e x, y, z,... sono gli elementi di S, per rappresentare S si usa anche il simbolo

$$\{x,\mathrm{y},z, \ldots .\}.$$

È opportuno osservare che in tale scrittura possono comparire delle ripetizioni o/e delle variazioni di ordine, che però non modificano l' insieme S. Ad esempio, in base alle nostre notazioni, i simboli

$$\{x,y\},\ \{x,y,x\},\ \{x,y,x,x\},\ \{y,x\}$$

rappresentano il medesimo insieme.

N O T E

(1) – «*Un insieme è una collezione, concepita come un tutto, di oggetti, ben distinguibili, della nostra intuizione o del nostro pensiero*».

Georg Cantor [1895]

È difficile definire il concetto di insieme senza usare una parola ad esso equivalente. La definizione cantoriana d'insieme, infatti, è circolare perché rimanda il significato a quello di collezione; ma: "*Che cos'è una collezione di oggetti*?" Risposta: "*Una collezione è un aggregato, dove per aggregato si intende una totalità, vale a dire una molteplicità, cioè . . ., cioè un insieme*".

Nell'ambito della teoria ingenua si muove dai concetti di insieme, di ente e di proprietà dandoli come *idee primitive*, cioè non-definite, limitandosi, per comodità del Lettore, ad evocarne alcuni sinonimi quali appunto: collezione, gruppo, famiglia, classe, totalità, ecc. per insieme; entità, oggetto, cosa, ecc. per ente; caratteristica, tipo, qualità, condizione, ecc. per proprietà. Di contro, i concetti non primitivi sono suscettibili di essere introdotti mediante *definizioni esplicite*. Esse fissano nozioni in cui non compaiono concetti dei quali non siano state date, precedentemente, a loro volta, delle definizioni. Per esempio, quando si dice: "*Si chiama triangolo ogni poligono di tre lati*", si enuncia la definizione esplicita del triangolo se sono già stati definiti, come si suppone, i due termini poligono e lato. Continuando in questo modo, però, definendo i concetti a ritroso, si arriverà inevitabilmente, se si vuole (come si vuole) che il processo abbia fine, ad un'idea non più riconducibile ad altre più semplici, a meno di cadere in definizioni circolari, cioè in definizioni di concetti per mezzo di nozioni derivate, o definite, facendo uso del concetto stesso che si vuole definire, direttamente o indirettamente.

Il carattere di una nozione (nozione è sinonimo qui e altrove di concetto e di idea) di essere primitiva o meno dipende, però, anche dalla particolare impostazione che si vuole dare alla teoria, e da quali idee mettere a fondamento di essa, anche se, come è intuitivo, ci si fa guidare da un criterio di massima semplicità: si muove quasi sempre, ed è opportuno farlo, da nozioni semplici e proprietà autoevidenti per arrivare a quelle più complesse, ma tecnicamente è possibile partire da altre, date come primitive, e, se non contraddittorie, ottenere una teoria ugualmente valida. Da qualche cosa, comunque, si deve pur partire, dal nulla si ottiene solo ed esclusivamente il nulla, e quando non è possibile muovere da nozioni definibili esplicitamente, questo è il caso delle teorie fondazionali, pertanto autosufficienti, quale la Teoria degli Insiemi, dobbiamo chiamare in causa concetti primitivi.

Nelle trattazioni assiomatizzate (o assiomatiche), le nozioni primitive sono *definite implicitamente* mediante i *postulati* o *assiomi* della teoria. Si parte da simboli a cui corrisponde un nome (per esempio x, y, ecc. e diciamo che essi denotano insiemi in teoria degli insiemi; P, Q, ecc. e r, s, ecc. rispettivamente per punto e retta in geometria) a cui non si attribuisce alcun significato a priori, ma relativamente ai quali si enunciano dei postulati atti a conferire implicitamente un significato opportuno perché traducono fatti o cose che si possono fare (o non fare) con quei simboli conformemente all'idea intuitiva che abbiamo di essi. Nelle teorie degli insiemi assiomatizzate, pertanto, "*insieme*" non è mai definito, almeno in senso esplicito, ma, qualsiasi cosa esso sia, tutto ciò che di esso si può dire sta negli assiomi della teoria o discende da essi che, pertanto, ne costituiscono una descrizione sì implicita, ma categorica, capace, cioè, di individuare l'oggetto in questione in maniera univoca. In altre parole, nelle assiomatiche non si dice che cosa è un insieme, ma si descrive quello che si può fare con essi mediante gli assiomi atti a tradurre fatti fondamentali, mutuamente condizionantesi, della nostra intuizione di insieme.

Per sviluppare la nostra Teoria, nota col nome di *Teoria di Zermelo-Fraenkel*, come per ogni altra teoria completamente assiomatizzata, si fissa un *linguaggio formale* basato sui seguenti *simboli* o *segni* che costituiscono *l'alfabeto* del linguaggio, indicato con L, il cui utilizzo è subordinato a regole sintattiche ben precise:

a) Simboli di variabili $x \ y \ z \ \ldots$

b) Simbolo di costante $\varnothing$

c) Simboli funzionali $\{\_,\_\}$ $\cup$ P

d) Simbolo relazionale $\in$

e) Simbolo di uguaglianza $=$ (che è considerato un segno logico)

f) Altri segni logici che sono i connettivi:

f_1) $\neg$ per la negazione

f_2) $\vee$ per la disgiunzione (debole)

f_3) $\wedge$ per la congiunzione

f_4) $\Rightarrow$ per l'implicazione

f_5) $\Leftrightarrow$ per l'equivalenza

g) I simboli dei quantificatori $\exists$ per "*esiste*" e $\forall$ per "*per ogni*"

h) Segni di interpunzione come le parentesi (e)

Si noti che i *simboli di variabili* $x, y, z, \ldots$ sono tali da permettere di denotare qualsiasi oggetto della nostra Teoria, cioè un insieme, e di distinguerlo (se necessario) da qualsiasi altro, ad ogni stadio di avanzamento del discorso matematico; se avessimo già definito tali oggetti, ovvero gli insiemi, e la nozione di infinito, diremmo che i simboli di variabili denotano insiemi ed essi stessi costituiscono un insieme infinito (di simboli).

Tra gli oggetti la cui natura andremo a definire, non di rado, faremo riferimento in modo invariabile ad uno di essi, e non a uno qualsiasi di essi, caratterizzato, cioè, da proprietà perspicue ben determinate, pertanto, anche se queste proprietà non sono ancora state precisate, per la sua denotazione predisponiamo l'utilizzo di un *simbolo di costane*, $\varnothing$.

Un *simbolo funzionale*, come il nome stesso suggerisce, consente di denotare un oggetto costruito a partire da altri oggetti i cui simboli che li identificano sono gli argomenti del simbolo funzionale e possono essere a loro volta simboli funzionali: predisponiamo, dunque, tre simboli funzionali, $\{\_,\_\}$, $\cup$, P il primo a due gli altri ad un argomento, ma anche in questo caso evitiamo di utilizzare parole come "*primo*", "*due*", "*tre*", ecc. perché per il momento esse non hanno alcun significato.

I *simboli relazionali* ci consentono di esprimere relazioni o proprietà sussistenti tra gli oggetti, essi sono detti anche *simboli predicativi* e, pertanto, il linguaggio L è un *linguaggio predicativo*. Qualsiasi cosa possa significare la frase "*relazione tra oggetti*", l'unica cosa che possiamo precisare intorno alle relazioni, in questa fase iniziale della nostra costruenda Teoria degli Insiemi, è che esse sussistono tra un certo numero di oggetti che sono detti *argomenti* del simbolo relazionale: prevediamo, allora, l'utilizzo di due simboli relazionali, l'*appartenenza*, $\in$, e l'*uguaglianza*, =, entrambi a due argomenti, ma evitiamo al solito di utilizzare nomi che non sono ancora stati definiti come "*numero*", "*relazione*", "*proprietà*". Di più, il simbolo di uguaglianza è considerato un segno logico perché denotante una circostanza logica, appunto, caratterizzata, cioè, da un sistema di assiomi (vedi nota 5) di natura logica applicabili quindi ad ogni teoria e non esclusivamente alla Teoria degli Insiemi, come è, invece, il caso del simbolo dell'appartenenza.

Predisponiamo altri *segni logici*, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$, la cui manipolazione, alla pari del simbolo di uguaglianza, è subordinata a un sistema di regole formali di natura logica (complementi 1.A, 1.B, 2.A e 2.B). Questi, tuttavia, non sono tutti necessari infatti, come si dimostrerà in seguito, essi sono sovrabbondanti (sulla minimalizzazione dell'alfabeto si veda il complemento 1.C del presente capitolo).

Infine precisiamo che non servono le *parentesi*: la notazione funzionale prefissa è tale da eliminare ogni ambiguità dell'analisi sintattica, come succede con la cosiddetta notazione polacca; le parentesi si usano lo stesso per perspicuità di lettura.

Premesso ciò, fissiamo la *sintassi* del linguaggio, cioè le regole che consentono il concatenamento dei simboli dell'alfabeto in modo corretto, così da ottenere delle espressioni, cioè delle sequenza di simboli atte a tradurre tutte le affermazioni che compongono la Teoria, sia a monte (assiomi), sia in fase di sviluppo (dimostrazioni) e sia a valle della stessa (risultati).

Le *parole* del linguaggio L sono sequenze finite di simboli, ottenute concatenando simboli e sequenze di simboli. L'operazione di concatenazione sarà indicata semplicemente scrivendo i simboli l'uno di seguito all'altro, da sinistra verso destra, come nelle scritture indoeuropee. Tra le *parole*, quelle che sono *ben formate*, e che chiameremo *espressioni*, si dividono in due categorie, quella dei *termini* e quella delle *formule*.

F_1 REGOLA DI FORMAZIONE DEI TERMINI

L'insieme dei *termini* è il più piccolo insieme di parole con le seguenti proprietà di chiusura:

- ogni parola costituita da una sola variabile è un termine (*atomico*)
- ogni parola costituita da una sola costante è un termine (*atomico*)
- se F è un simbolo funzionale ad n argomenti e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini, anche $Ft_1,t_2,\ldots,t_n$ è un termine, di cui $t_1,t_2,\ldots,t_n$ sono i *sottotermini* immediati.

Si osservi che, nel nostro linguaggio L, per la formazione di termini con i simboli funzionali ad un argomento, P ed $\cup$, si usa la notazione prefissa, e nel primo caso con l'ausilio anche delle parentesi; per cui se t è un termine anche P(t) e $\cup$t sono termini. Per la formazione di termini con il simbolo funzionale a due argomenti, invece, si usa la notazione infissa; per cui se t_1 e t_2 sono termini anche $\{t_1, t_2\}$ è un termine.

Si dice che un simbolo *occorre* in una parola se è uno degli elementi della sequenza che costituisce la parola; le *occorrenze* di un simbolo in una parola sono i vari posti, se ce ne sono, in cui occorre. Un termine in cui non occorre nessuna variabile si dice *termine chiuso*. Esempi di termini sono: x, y, $\{x,y\}$, $P(x)$, $P(\{x,y\})$, $\cup P(x)$, ecc. per termini aperti; $\varnothing$, $\{\varnothing,\varnothing\}$, $P(\varnothing)$, ecc. per termini chiusi. A livello semantico i termini rappresentano insiemi.

Una *formula atomica* è una parola della forma $Rt_1t_2 \ldots t_n$ dove R è un simbolo relazionale a n argomenti e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini. In L, quindi, le uniche formule atomiche sono $t_1 \in t_2$ e $t_1 = t_2$, entrambe a due argomenti ed entrambe scritte in notazione infissa.

F$_2$ REGOLA DI FORMAZIONE DELLE FORMULE

L'insieme delle *formule* è il più piccolo insieme di parole con le seguenti proprietà di chiusura:

- le formule atomiche sono formule
- se A è una formula, anche $(\neg A)$ è una formula
- se A e B sono formule, anche $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$

sono formule

- se A è una formula e x una variabile, anche $(\exists x\mathrm{A})$, $(\forall x\mathrm{A})$ sono formule dove A è la *sottoformula* immediata che è anche il *raggio d'azione* dei quantificatori.

In una formula composta con un quantificatore, o come si dice quantificata, del tipo $(\exists x\mathrm{A})$ o $(\forall x\mathrm{A})$, tutte le occorrenze della *variabile quantificata*, in questo caso x, si dicono *vincolate*, o *legate*, nella formula. Codeste occorrenze restano tali, cioè vincolate, se $(\exists x\mathrm{A})$ o $(\forall x\mathrm{A})$ sono usate come sottoformule nella costruzione di una formula più complessa. In generale dunque, in una formula le occorrenze vincolate di una variabile x sono quelle che cadono entro il raggio d'azione di un quantificatore $\exists$ o $\forall$ presente nella formula e seguito immediatamente da x.

Una *variabile* si dice *vincolata* in una formula se ha occorrenze vincolate in tale formula. Le occorrenze di una variabile in una formula che non sono vincolate si dicono *libere*, e una *variabile* si dice *libera* in una formula se ha occorrenze libere in quella formula . Una variabile (non una occorrenza di una variabile) può essere simultaneamente libera e vincolata in una formula; ad esempio in

$$x\in y\Rightarrow\forall x\neg(x\in y)$$

x ha sia occorrenze libere, la prima, che vincolate, le altre, mentre y ha solo una occorrenza libera.

Una formula in cui non occorrono variabili libere si dirà *formula chiusa*, o *enunciato*. Se vi occorrono variabili libere, *aperta*. Se si parla di formule in generale, si intende una formula che può essere sia chiusa che aperta.

Un *termine* t si dice *libero* per x in A se t non contiene variabili le cui occorrenze risultano vincolate, dopo la sostituzione di t al posto di x in A indicata con A[x/t]. Per esempio in $\forall y(x\in P(y))$, y e ogni termine contenente la y non sono liberi per x.

Le formule chiuse, inoltre, hanno senso compiuto e traducono le *proposizioni*, quelle aperte i *predicati*. Usuali abbreviazioni sono: $x\notin y$ per $\neg(x\in y)$, $x\neq y$ per $\neg(x=y)$; i quantificatori ristretti: $\forall x\in y. . .$ al posto di $\forall x(x\in y. . .)$, $\exists x\in y . . .$ al posto di $\exists x(x\in y . . .)$; $\forall$x,y . . . per $\forall x\forall y . . .$ oppure $\forall x,. . .,y$ per $\forall x . . .\forall y$, ed analogamente per $\exists$.

Con questa lunga serie di definizioni abbiamo fissato, dunque, la sintassi del linguaggio L necessario per lo sviluppo della Teoria di *Zermelo-Fraenkel*, vale a dire le regole, F_1 ed F_2, per utilizzare i simboli dell'alfabeto correttamente. Ricordiamo, però, che per il momento detti simboli non hanno alcun significato specifico: la funzione di conferire loro un "*surrogato*" di significato è svolta dagli *Assiomi* della Teoria. Per esempio, uno degli assiomi di *Zermelo-Fraenkel* (dopo aver definito gli insiemi riflessivi) afferma che esiste almeno un insieme riflessivo. Con gli assiomi, invero, non definiamo la parola "*insieme*", ma diciamo comunque qualcosa sugli insiemi che intuitivamente vogliamo essere vera, compiendo in tal senso un atto definitorio in forma implicita.

Va da sé, poi, che sussiste il problema del numero e del tipo di assiomi da scegliere per definire implicitamente una nozione primitiva come quella di insieme con la massima categoricità conformemente all'intuizione che abbiamo di essa.

Per la Teoria di *Zermelo-Fraenkel*, d'ora in poi indicata brevemente con ZF, si scelgono gli assiomi, ad eccezione di A_{11}, della seguente lista che sarà analizzata nel seguito:

A_1 ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ
(A_2 ASSIOMA DI SEPARAZIONE)
(A_3 ASSIOMA DELL'INSIEME VUOTO)
A_4 ASSIOMA DI RIMPIAZZAMENTO
(A_5 ASSIOMA DELLA COPPIA)
A_6 ASSIOMA DELLA POTENZA
A_7 ASSIOMA DELL'UNIONE
A_8 ASSIOMA DI SCELTA
A_9 ASSIOMA DELL'INFINITO
A_{10} ASSIOMA DI FONDAZIONE
A_{11} IPOTESI DEL CONTINUO

Si noti che A_2, A_3 ed A_5 sono indicati tra parentesi perché in realtà sono dei teoremi, come si vedrà in seguito, essi discendono dai rimanenti assiomi e dagli assiomi logici, pertanto ZF si basa in definitiva solo sui seguenti sette assiomi: A_1, A_4, A_6, A_7, A_8, A_9 e A_{10}.

Faremo breve riferimento anche alla sottoteoria di ZF ottenuta da ZF con l'aggiunta dell' IPOTESI DEL CONTINUO, A_{11}, indicata nel seguito con ZFI, ed alla teoria debole ottenuta da ZF privata dell'ASSIOMA DI FONDAZIONE, A_{10}, la quale sarà invece indicata con ZF−.

In conclusione della presente nota interamente dedicata alla formalizzazione della Teoria degli Insiemi, occorre ribadire quanto segue.

In primo luogo osserviamo che il sistema di Assiomi A_1, A_4, A_6, A_7, A_8, A_9 e A_{10}, che come vedremo sono espressi mediante formule del linguaggio L, la cui sintassi e retta dalle regole F_1 ed F_2, definiscono rigorosamente il concetto di *insieme* secondo la Teoria di *Zermelo-Fraenkel*: come detto trattasi di una definizione implicita, come è necessario se si vuole rendere autofondazionale la teoria stessa, tuttavia il concetto di insieme è definito in modo categorico.

In secondo luogo occorre precisare che la Teoria degli Insiemi (ma questo vale per qualsiasi teoria scientifica), se la si vuole completamente formalizzare, necessita anche di un sistema di regole atte a stabilire con precisione il modo con cui si possono dedurre altre formule, a partire da quelle poste come assiomi, traducenti le conclusioni a cui si può pervenire nell'ambito della teoria e che quindi costituiscono la struttura delle dimostrazioni (valide) della stessa. Tali regole non possono essere, ovviamente, che di natura logica e sono, come già detto, quelle che sovrintendono alla manipolazione dei simboli logici all'interno di formule per ottenere altre formule (non per la formazione di formule a partire da formule atomiche che è altra cosa). Queste regole sono i cinque assiomi dell'uguaglianza U_1, U_2, U_3, U_4 e U_5 che saranno presi in esame in nota 5, e le 15 regole di inferenza R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14} e R_{15} di cui si parlerà dettagliatamente nei complementi dei primi capitoli, che insieme ai precedenti costituiscono nel loro complesso il cosiddetto *Calcolo dei Predicati del Primo Ordine con Uguaglian-*

za (la specifica "*del Primo Ordine*" significa che i quantificatori sono applicabili solo alle variabili e non alle formule).

In definitiva, tenendo presente che ogni settore della matematica può essere ricondotto, in ultima analisi, alla Teoria degli Insiemi, possiamo dire che tutta la *matematica zermeliana* può essere sviluppata mediante il seguente sistema di simboli, regole sintattiche, assiomi e regole di inferenza logica: L, F_1, F_2, A_1, A_4, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}.

---

(2) – Gli insiemi menzionati nella trattazione ingenua sono collezioni formate da enti assunti a loro volta come oggetti primitivi. Si noti che la parola "*ente*" designa anche l'oggetto di studio (insiemi), per non usare la parola "*oggetto*"; la parola "*ente*" ha un significato ambiguo, e sapere quale esso sia è il problema perenne della filosofia; "*ente*" è ancora più sfuggente di "*insieme*", perché appunto è un termine filosofico, non della lingua comune.

Sicuramente gli insiemi sono enti, ma non tutti gli enti sono insiemi. Per esempio, se si vuole parlare di un Gruppo come di un insieme con una operazione $\prec G,+,0\succ$, G è un insieme e gli elementi del Gruppo sono appunto gli elementi di G, che però non sono chiamati insiemi, bensì enti dell'insieme in quanto distinti da insiemi. Di fatto sono insiemi anche loro, se tutto è insieme, ma ci si vieta di porre domande del tipo $x \in y$ per x, $y \in$G, perché $\in$ non appartiene al linguaggio della Teoria dei Gruppi. Ci chiediamo, invece, se $x+y=z$ perché + è una relazione, e questioni del genere.

Nella versione *riduzionista*, e quindi assiomatizzata, della T.d.I. questi enti non servono, perché se e quando sono davvero oggetti matematici, sono riconosciuti proprio come insiemi. Infatti, per gli studi matematici sugli insiemi, tutti gli elementi degli insiemi sono insiemi. In virtù di questa restrizione diciamo che *un insieme è una collezione di dati insiemi*. È una restrizione che esclude gli insiemi di tavoli e di elefanti, ma non esclude gli insiemi di numeri o le funzioni, che vengono identificati con certi insiemi.

In ZF, e relative sue varianti, quindi, l'unico ente matematico è l'insieme; la nozione di ente non è più necessaria.

---

(3) – In verità la nozione di proprietà può essere ricondotta a quella di insieme, ed è quanto si fa nelle teorie assiomatizzate.

Se per proprietà si intende un attributo descrittivo astraendo dagli oggetti che lo possiedono tale che, però, per ogni oggetto si possa dire se lo possiede oppure non, come per esempio "*essere di colore rosso*" oppure "*essere velenoso*" senza alcun riferimento alle cose rosse o a quelle velenose, allora si tratta di una nozione *intensionale* che esiste, cioè, a prescindere dal sistema di oggetti che la possiedono. In tal senso essa è una nozione primitiva quindi non riconducibile ad altre più elementari. Invero, nell'ambito delle teorie assiomatizzate si identifica la nozione di proprietà con quella dell' insieme di tutte le cose che la possiedono, cioè con la sua *estensione*. In altri termini, per parlare di proprietà bisogna fissare prima l' insieme di tutte le cose che ne godono (estensione della proprietà) poi, per un oggetto qualsiasi stabilire se è elemento oppure no dell'insieme: se lo è, la proprietà è vera per quel oggetto altrimenti è falsa. Questa riduzione, però, funziona per tutte le considerazioni svolte in matematica ma pone dei limiti per le *proprietà equiestese*: se tutte le cose rosse fossero velenose allora la proprietà di essere rosso è identica a quella di essere velenoso e questo non è accettabile, almeno nel senso intensionale, in quanto percepiamo pur sempre le due cose in maniera diversa.

Un altro problema che sorge quando si tenta di ridurre le proprietà ad insiemi consiste nel fatto che non tutte le proprietà hanno una estensione (Paradosso di Russell), cioè nel fatto che non sempre tutti gli enti che godono di una proprietà formano un insieme.

La situazione sembra essere la seguente: qualsiasi insieme determina ed è determinato da una proprietà; invero, non tutte le proprietà determinano insiemi, quale loro estensione. In un certo senso sembra che vi siano più proprietà che insiemi. Per contro, l'estensionalità degli insiemi (nota 6), il fatto, cioè, che gli insiemi sono determinati dai loro elementi, per cui due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi, li vuole rendere più vicini alle estensioni delle proprietà che non alle proprietà stesse, benché quasi sempre un insieme sia introdotto come estensione di una proprietà. Se si insiste troppo sulla differenza, e sugli insiemi come staccati dalle proprietà, si finisce con il cercare di immaginare gli insiemi come cose materiali, caratterizzati dalla pesantezza del loro essere e non dalle loro descrizioni, il che è un'immagine non del tutto accettabile.

Una caratterizzazione assiomatica delle proprietà con il loro carattere intensionale sembra impossibile per il loro dipendere dal modo in cui sono concepite, più che dalle definizioni che ne vengono date esplicitamente, e che se sono abbastanza precise hanno contorni estensionali ben definiti.

———

(4) – In ZF e in tutte le teorie assiomatizzate fondazionali (come detto in note 1, 2, 5) abbiamo un solo tipo di oggetti: gli insiemi; pertanto si dovrebbe usare un solo tipo di variabili indicate con i simboli x, y, z,. . . . del linguaggio L secondo l'uso logico-formale (nota 1). Nella presente trattazione semi-formale degli insiemi, uniformandoci all'uso matematico useremo anche altre lettere, con l'obiettivo della massima leggibilità. Così useremo le lettere maiuscole S, T, U, V,. . . . quando, dovendo fissare certi insiemi ambienti in un ragionamento, verrà comodo indicare quelli fissati con lettere diverse da quelle dei loro elementi, indicati al solito con le lettere minuscole x, y, z,. . . . o con le maiuscole X, Y, Z,. . . . se questi ultimi sono insiemi di altri elementi esplicitamente indicati nello stesso contesto.

Certi tipi di insiemi, come vedremo, hanno lettere speciali loro riservate, come: r, s,. . . . per le *relazioni*; f, g,. . . . per le *funzioni*; lettere maiuscole in corsivo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$,. . . . per *famiglie di insiemi*, e così via (queste nozioni saranno tutte definite rigorosamente più avanti).

---

(5) – «*L'uguaglianza ci fa riflettere su alcune questioni che ad essa si connettono e a cui è difficile rispondere.*[. . .] *Evidentemente a=a e a=b sono enunciati di diverso valore conoscitivo; a=a vale a priori e, secondo Kant, dev'essere chiamato analitico, mentre enunciati della forma a=b contengono spesso ampliamenti notevoli della nostra conoscenza e non sempre si possono fondare a priori. La scoperta che non sorge ogni mattina un nuovo sole, ma sempre il medesimo, è stata indubbiamente una delle più feconde dell'astronomia.* [. . .] *Ora, se nell'uguaglianza volessimo vedere una relazione tra ciò che i nomi "a" e "b" denotano, sembrerebbe che non ci possa essere alcuna differenza tra a=b e a=a, ammesso che sia vero a=b*».

Gottlob Frege [1892]

Essere uguali in effetti è una nozione delicata, verrebbe da dire inesprimibile a meno di non banalizzarci alquanto: ognuno dovrebbe essere uguale solo a se stesso, e poi ancora, solo istante per istante. La soluzione proposta da Frege consiste nel distinguere due componenti nel significato di un nome: il suo *senso* e la sua *denotazione*.

Mentre la denotazione di un nome è l'oggetto vero e proprio cui il nome si riferisce, il suo senso è il modo in cui tale oggetto viene identificato. Così i due nomi "*l'autore de La Logica della Scoperta Scientifica*" e "*l'autore de La Società Aperta e i suoi Nemici*" hanno la stessa denotazione, ma differiscono per il modo in cui tale denotazione viene identificata, e cioè per il loro senso. Un'analoga distinzione si applica anche alle proprietà (proposizioni aperte o predicati tradotte nel linguaggio formale dalle formule aperte). La denotazione o, come preferiamo dire, l'estensione (vedasi nota 3) di una proposizione aperta in m variabili libere, è l'insieme delle m-ple ordinate di cui essa è vera, mentre il suo senso o intensione è costituito dal modo in cui tali m-ple vengono identificate. Così, per esempio, la proposizione aperta "*….è un triangolo isoscele*" ha la stessa estensione della proposizione aperta "*….è un triangolo con gli angoli alla base uguali*", ma non ha certo la stessa intensione. È per questo che la proposizione (chiusa) "*i triangoli isosceli hanno gli angoli alla base uguali*" è una proposizione geometrica informativa e non una banalità priva di contenuto.

In virtù di quanto detto si può ritenere che chiunque possa essere considerato, a tutti gli effetti precisati dal tipo di discorso che si sta facendo, uguale a qualcun altro; di qui gli *Assiomi dell'Uguaglianza* quale simbolo logico:

U_1 $x=x$ riflessività

U_2 $x=y \Rightarrow y=x$ simmetria

U_3 $x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z$ transitività

U_4 $x_1=y_1 \wedge . . . . \wedge x_n=y_n \wedge \mathrm{R}x_1 . . . . x_n \Rightarrow \mathrm{R}y_1 . . . . y_n$ sostitutività

U_5 $x_1=y_1 \wedge . . . . \wedge x_n=y_n \wedge \mathrm{F}x_1 . . . . x_n \Rightarrow \mathrm{F}y_1 . . . . y_n$ sostitutività dove R è una relazione ad n posti ed F è una funzione ad n posti. I primi tre sono gli *Assiomi dell'Equivalenza*, i due rimanenti gli *Assiomi di Sostitutività*.

Si noti che, essendo l'uguale, =, esso stesso, un simbolo relazionale, queste formule non sono tutte indipendenti, perché, per esempio, la transitività è un caso particolare della sostitutività per la relazione = e della riflessività; infatti se $x=y \wedge y=z$, cioè se $x=y$ e $y=z$, da $x=x$ (riflessività) e da $y=z$ (la seconda delle due formule componenti) per sostitutività di x con x e di y con z in $x=y$ (la prima delle due formule componenti) si ha $x=z$. Si preferisce però, per chiarezza, isolare le tre proprietà: simmetrica, riflessiva e transitiva.

---

(6) – Tra gli insiemi consideriamo una sola relazione fondamentale: *la* appartenenza; per cui il solo simbolo funzionale $\in$ basterebbe nella costruzione formale (vedasi anche complemento 1.C).

Essere un elemento è sempre un fatto relazionale, "*essere elemento di….*", e non comporta una distinzione di natura tra elementi e insiemi: gli elementi di un insieme sono insiemi anch'essi; per essere un elemento bisogna anche essere un insieme.

Le uniche domande che inizialmente si possono porre sugli insiemi sono di questo tipo: se un insieme appartiene ad un altro insieme oppure no; se due insiemi hanno o no gli stessi elementi (non lo stesso numero di elementi); se appartengono o meno agli stessi insiemi. Non c'è altro di cui si possa parlare, anche se sembra un discorso un po' povero di sviluppi.

---

(7) – È il contenuto del primo assioma della teoria ZF: se due insiemi sono diversi non può essere che abbiano gli stessi elementi e che appartengano agli stessi insiemi, altrimenti non sarebbero distinguibili. Per contro, se hanno gli stessi elementi (e/o appartengono agli stessi insiemi) allora sono uguali. Poiché vedremo che, sulla base dei prossimi assiomi (vedasi nota 21), se due insiemi sono diversi allora non possono appartenere agli stessi insiemi, per non appesantire inutilmente la scrittura si formula il primo assioma solo relativamente all'altra condizione:

A_1 ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ

$$\forall z(z\in \mathrm{S}\Leftrightarrow z\in \mathrm{T})\Rightarrow \mathrm{S}=\mathrm{T}$$

dove la scrittura $\forall z(z\in \mathrm{S}\Leftrightarrow z\in \mathrm{T})$ denota il fatto che S e T hanno gli stessi elementi.

Da notare che l'implicazione inversa di A_1 è una conseguenza logica degli Assiomi di Sostitutività dell'Uguaglianza (nota 5).

1.2 Ulteriori Nozioni

Sia $\mathscr{P}$ una proprietà[8]. Se x è un ente per il quale la proprietà $\mathscr{P}$ è vera, si usa una delle scritture

$$x \mid \mathscr{P} \quad \text{e} \quad x : \mathscr{P}$$

(ciascuna delle quali va letta "x tale che $\mathscr{P}$ ")[9]. Inoltre l'insieme degli enti per i quali la proprietà $\mathscr{P}$ è vera si denota indifferentemente con uno dei simboli [10], [11], [12]

$$\{x \mid \mathscr{P}\} \quad \text{e} \quad \{x : \mathscr{P}\}.$$

Siano $\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}$' proprietà. Si dice che $\mathscr{P}$ *implica* $\mathscr{P}$', e si usa il simbolo

$$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{P}'$$

se non esiste alcun ente per il quale $\mathscr{P}$ sia vera e $\mathscr{P}$' sia falsa. In particolare una proprietà falsa per ogni ente implica ogni proprietà. Si dice poi che le proprietà $\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}$' sono equivalenti, e si usa il simbolo

$$\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{P}'$$

se $\mathscr{P}$ implica $\mathscr{P}$' e $\mathscr{P}$' implica $\mathscr{P}$. Quindi due proprietà $\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}$' sono equivalenti se e solo se gli enti per i quali $\mathscr{P}$ è vera sono tutti e soli quelli per i quali $\mathscr{P}$' è vera, cioè se e solo se gli insiemi $\{x \mid \mathscr{P}\}$ e $\{x \mid \mathscr{P}'\}$ coincidono.

Nel seguito l'affermazione "*esiste un ente x*" sarà rappresentata col simbolo $\exists x$, mentre per l'affermazione "*qualunque sia x* " si userà la scrittura $\forall x$. I simboli $\exists$ e $\forall$ si chiamano rispettivamente *quantificatore esistenziale* e *quantificatore universale*.

NOTE

(8) – "*Proprietà*" è qui inteso in senso estensionale (vedasi nota 3).

---

(9) – Formalmente i simboli " | " o " : " non sono ancora stati introdotti. In verità non esiste, a questo stadio della teoria, nemmeno la nozione di estensione di una proprietà. Tutto quello che abbiamo è un alfabeto formato da simboli privi di significato e regole per la formazione, con essi, di parole e tra queste ci sono le formule aperte (nota 1) costruite per mezzo di connettivi a partire dalle formule atomiche $t_1 \in t_2$ e $t_1 = t_2$ dove t_i sono termini. Tali formule saranno impiegate, come vedremo subito, per denotare le proprietà e per definire le estensioni come insiemi, ma, per fare ciò, si deve introdurre il secondo assioma della teoria.

---

(10) – Il secondo assioma di ZF:

A_2 ASSIOMA DI SEPARAZIONE

Se A(x,. . . .) *è una formula con la variabile x libera e con eventuali altri parametri (variabili) diversi da* T *allora*:

$$\forall S\exists T\forall x(x\in T\Leftrightarrow x\in S\wedge A(x,\ldots.))$$

A parole, l'Assioma di Separazione postula l'esistenza, per ogni insieme S prefissato, di un insieme T i cui elementi sono tutti e soli quelli di S che rendono vera la proprietà $\mathscr{P}$ denotata dalla formula A(x,. . . .). Esso, quindi, ci garantisce l'esistenza dell'estensione, l'insieme T, della proprietà $\mathscr{P}$ relativamente a oggetti che, però, già fanno parte di un *insieme ambiente*: l'insieme S.

Da A_1 segue che per ogni insieme S esiste esattamente un insieme T i cui elementi sono gli $x\in S$ per cui A(x,. . . .); quest'unico insieme sarà denotato con

$$\{x\in S \mid A(x,\ldots.)\}\ ,$$

oppure, usando il *simbolo di proprietà* di x, con

$$\{x\in S \mid \mathscr{P}\}$$

e dipende da S e dagli altri eventuali parametri presenti nella formula A(x,…).

La restrizione nell'Assioma A_2 sul parametro T, cioè che T non occorra in A(x,. . . .), ha tra i suoi principali scopi quello di evitare un'antinomia diretta; senza la restrizione, prendendo per A(x,. . . .) la formula $x\notin T$ esso direbbe: $\forall S\exists T\forall x(x\in T\Leftrightarrow x\in S\wedge x\notin T)$ che per S=T darebbe, per la regola della ∃-ELIMINAZIONE (complemento 2.A del capitolo 2) e per gli Assiomi di Sostitutività dell'Uguaglianza (nota 5),

$\exists T\forall x(x\in T\Leftrightarrow x\in T\wedge x\notin T)$; assurdo perché così esisterebbe un x tele che $x\in T$ e simultaneamente $x\notin T$.

La restrizione è forte, però, in quanto proibisce ogni tipo di definizione circolare, incluse quelle ricorsive, per le quali si dovrà trovare un'altra giustificazione (complemento 5.A del capitolo 5).

---

(11) – La notazione $\{x\in S \mid \mathscr{P}\}$ suggerisce un'estensione ed un rafforzamento a $\{x \mid \mathscr{P}\}$; viene naturale parlare dell'insieme di tutti gli x che soddisfano la proprietà $\mathscr{P}$. Invece non si può usare la scrittura $\{x \mid \mathscr{P}\}$ senza dimostrare preliminarmente che esiste questo insieme, chiamiamolo T, i cui elementi sono quelli che verificano la proprietà $\mathscr{P}$. In altri termini, lo *schema di comprensione*

$$\exists T\forall x(x\in T\Leftrightarrow A(x,\ldots))$$

non è dimostrabile né compatibile con gli assiomi per tutte le formule. Anzi è refutabile già per formule molto semplici, come per la formula $x\notin x$, infatti se $\exists T\forall x(x\in T\Leftrightarrow x\notin x)$ detto V un tale insieme si avrebbe per esso $\forall x(x\in V\Leftrightarrow x\notin x)$, e per $x=V$, $V\in V\Leftrightarrow V\notin V$ che è una *contraddizione*. L'argomentazione, conosciuta come P*aradosso di Russell*, merita un chiarimento meno formale.

Per l'Assioma di Estensionalità l'insieme T, che deriverebbe dallo schema di comprensione per la formula $x\notin x$, è unico: $T=\{x \mid x\notin x\}$. Vale a dire, T è l'insieme di tutti gli oggetti, detti *insiemi normali* o *regolari*, che non appartengono a se stessi come elementi. Adesso, nessuno può mettere in dubbio l'esistenza di insiemi normali, per esempio l'insieme delle lettere di questa nota, non essendo a sua volta una lettera, è un insieme normale, e con essi l'esistenza dell'insieme T costituito da tutti gli insiemi normali. È altresì indubbio che un qualsiasi insieme o è normale o non è normale, senza una terza possibilità. La domanda che ora ci poniamo è se T è un insieme normale. Si ha che se T è normale, cioè se $T \notin T$ allora, siccome in T vi sono tutti gli insiemi normali, sarà $T \in T$, vale a dire che T, appartenendo a se stesso come elemento, non è normale, il che è assurdo; viceversa, se T non è normale, cioè se $T \in T$, per come è definito l'insieme T, si ha $T \notin T$, vale a dire che T, non appartenendo a se stesso come elemento, è normale, ancora un assurdo.

Lo *schema di comprensione* $\{x \mid \mathcal{P}\}$ affermerebbe che per ogni proprietà esista, come insieme, la sua estensione, ma questo principio non è logicamente accettabile. Nella T.d.I di ZF non solo non si riesce a ripetere questa antinomia, ma si dimostra che non è possibile attraverso il seguente lemma, che è la negazione dello schema di comprensione

Lemma 1.1.1

$$\neg\exists T \forall x (x \in T \Leftrightarrow x \notin x).$$

DIMOSTRAZIONE

Dato che $\exists T \forall x (x \in T \Leftrightarrow x \notin x)$ porta ad una contraddizione logica la sua negazione è vera. ▪

---

(12) – La tecnica delle precedenti argomentazioni (note 10 e 11) permette di ottenere anche informazioni interessanti, ad esempio la non

esistenza di un insieme universale $\mathscr{U}$ che deriverebbe dalla comprensione con la proprietà sempre vera $x=x$. Cioè da $\exists \mathrm{T}\forall x(x\in \mathrm{T}\Leftrightarrow x=x)$ ed A_1 esisterebbe ed è unico lo insieme $\mathscr{U}$ individuato da

$$\mathscr{U}=\{x \mid x=x\}$$

a cui apparterrebbe ogni oggetto (insieme); in formule: $\forall x(x\in \mathscr{U})$.

Invece vale il seguente:

Lemma 1.1.2

$$\neg\exists \mathscr{U}\forall x(x\in \mathscr{U}).$$

DIMOSTRAZIONE

Se esistesse un tele insieme $\mathscr{U}$ sostituito al posto di S nell'Assioma di Separazione e ponendo per $\mathrm{A}(x, \ldots)$ la formula $x\notin x$ si avrebbe

$$\exists \mathrm{T}\forall x(x\in \mathrm{T}\Leftrightarrow x\in \mathscr{U}\wedge x\notin x),$$

ma $\forall x(x\in \mathscr{U})$ è sempre vera per definizione di $\mathscr{U}$, quindi si otterrebbe, per la regola della $\wedge$-ELIMINAZIONE (complemento 1.A del capitolo 1) lo schema equivalente (paradosso di Russell)

$$\exists \mathrm{T}\forall x(x\in \mathrm{T}\Leftrightarrow x\notin x)$$

che porta, come visto, ad una contraddizione. ▪

A parole, la dimostrazione consiste nell'affermazione che se esistesse l'insieme $\mathscr{U}$ di tutti gli insiemi esisterebbe anche l'insieme T di tutti gli insiemi normali; ma per il lemma precedente ciò è impossibile.

Detto in altro modo,

Corollario 1.1.3

$$\forall S \exists x (x \notin S),$$

cioè, per ogni insieme S, esiste almeno un oggetto (insieme) che non gli appartiene. ▪

Si noti infine che, come il lemma precedente, si possono provare altri risultati analoghi, che assicurano che gli insiemi degli assiomi non sono grandi come l'universo, e neanche vi si avvicinano: ad esempio che non esistono due insiemi tali che ogni insieme appartenga ad uno dei due formalmente $\neg(\exists \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)\forall x(x\in \mathcal{U}_1 \vee x\in \mathcal{U}_2)$; e non esiste un insieme che genera l'universo attraverso la chiusura rispetto a $\in$,

$$\neg\exists \mathcal{U} \forall x \exists Y \in \mathcal{U} (x \in Y).$$

Il Lettore provi a dimostrarlo.

1.3 Sottoinsiemi - Insieme Vuoto

Esistono proprietà false per ogni ente; tale è ad esempio la proprietà $x \neq x$.

Si conviene che una proprietà falsa per ogni ente determini un insieme privo di elementi, chiamato *insieme vuoto* e denotato col simbolo $\varnothing$(13).

Siano S e T insiemi. Si dice che S è *contenuto* in T, oppure che T *contiene* S, e si usa una qualunque delle scritture[14]

$$S \subseteq T \quad e \quad T \supseteq S,$$

se non esiste alcun elemento di S che non sia anche elemento di T. In questo caso si dice anche che S è *incluso* in T oppure che T *include* S, o ancora che S è una *parte*, oppure un *sottoinsieme*, di T. Per denotare che l'insieme S non è contenuto nell'insieme T si usa uno dei simboli[15]

$$S \nsubseteq T \quad e \quad T \nsupseteq S.$$

Ovviamente l'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme[16], e qualunque sia l'insieme S risulta $S \subseteq S$. Dalla definizione segue subito che, se S e T sono insiemi, si ha $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$ se e solo se $S = T$[17].

Si dice che un insieme S è *contenuto propriamente* in un insieme T, oppure che T *contiene propriamente* S, e si usa uno dei simboli

$$S \subset T \quad e \quad T \supset S,$$

se S è contenuto in T e $S \neq T$, cioè se ogni elemento di S è anche elemento di T, ma esiste un elemento di T che non appartiene ad S. In questo caso si dice anche che S è *incluso propriamente* in T oppure che T *include propriamente* S, o ancora che S è una *parte* *propria*, oppure un *sottoinsieme proprio*, di T. Per denotare che S non è contenuto propriamente in T si usa uno dei simboli[18]

$$S \not\subset T \quad e \quad T \not\supset S.$$

Risulta che l'insieme vuoto $\varnothing$ è contenuto propriamente in ogni insieme non vuoto[19].

Se S è un insieme e $\mathcal{P}$ è una proprietà, il sottoinsieme di S costituito dagli elementi per i quali la proprietà $\mathcal{P}$ è vera sarà denotato con uno dei simboli[20]

$$\{x \in S \mid \mathcal{P}\} \quad e \quad \{x \in S : \mathcal{P}\}.$$

N O T E

(13) – Per mezzo della costante $\varnothing$ formuliamo il terzo assioma:

A_3 ASSIOMA DELL'INSIEME VUOTO

$$\forall x (x \notin \varnothing)$$

l'insieme $\varnothing$ è detto insieme vuoto e non ha alcun elemento.

Finora non sapevamo nemmeno se esistesse un solo insieme. Molti degli assiomi della teoria, infatti, sono del tipo: "*se sono dati certi insiemi, allora ne esiste anche uno che*. . . .". Non è però necessario un assioma che postuli l'esistenza di un insieme (pertanto A_3 è sovrabbondante);

la logica che usiamo garantisce che ogni *interpretazione* della teoria non è vuota, per cui in ogni interpretazione qualche insieme esiste; formalmente la cosa è ancora più semplice, perché basta davvero scrivere una x, senza preoccuparci di cosa indichi. In altri termini, $\exists x(x=x)$ è un teorema della nostra logica formale, derivante dal primo Assioma dell'Uguaglianza (nota 5) e dall'applicazione della regola di inferenza detta $\exists$–INTRODUZIONE (complemento 2.A del capitolo 2). Gli assiomi della teoria, come più volte detto, hanno solo la funzione di caratterizzare il simbolo x in conformità con la nostra idea intuitiva di insieme.

A riprova di quanto detto vi è il fatto che l'esistenza dell'insieme vuoto si dimostra dall'Assioma di Separazione A_2, prendendo un qualsiasi insieme T, per la proprietà $x\neq x$: si ha che $\emptyset=\{x\in T \mid x\neq x\}$, e T esiste. Da A_1 segue che per ogni S se $\forall y(y\notin S)$ allora $S=\emptyset$, cioè l'unicità dell'insieme vuoto.

Il fatto non è, però, banale: che l'insieme S abbia gli stessi elementi dell'insieme vuoto, e pertanto in virtù dell'estensionalità $S=\emptyset$, discende per "*mancanza di controesempi*". Per meglio dire, $S=\emptyset$ è vero perché non c'è nessun $y\in S$ tale che $y\notin\emptyset$ e questo semplicemente perché non si può trovare nessun $y\in S$, quindi non c'è bisogno di continuare la ricerca.

L'insieme vuoto non deve essere pensato come qualcosa di evanescente, ma la contrario come qualcosa di molto concreto, tanto concreto da non poter essere concepito come collezione di altri oggetti. Quando la T.d.I. è usata come ausilio in altre ricerche (come in Teoria dei Gruppi, Anelli, ecc.), normalmente il suo linguaggio serve a descrivere strutture che sono date da un insieme di elementi non ulteriormente specificati, e di cui non interessano gli elementi; quello che interessa, in tali casi, sono invece gli insiemi e le relazioni o funzioni su di essi, tanto che gli elementi della struttura sono chiamati oggetti, come se non fossero insiemi: di fatto essi si comportano come lo insieme vuoto.

L'insieme vuoto può servire perciò a modellare queste situazioni, a parte la difficoltà, eliminabile, dovuta alla sua unicità. Esso, infine, oltre a presentare i vantaggi tecnici relativi al carattere totale di certe operazioni che saranno definite in seguito, come lo zero in aritmetica (è questa funzione la responsabile dell'immagine del vuoto come di un insieme evanescente), resta come allusione al fatto che non tutto è insieme.

Una sua più completa comprensione segue anche dai due possibili modi di dimostrarne l'esistenza, senza postularla, grazie ai restanti assiomi. Un modo deriva, come si vedrà, dall'Assioma di Fondazione e dall'esistenza di un insieme transitivo, cioè da proprietà strutturali globali della relazione $\in$ ($\in$ è una relazione fortemente asimmetrica che ordina gli insiemi in modo illimitato verso l'alto, partendo da una base, $\varnothing$, che è l'insieme senza predecessori). Il secondo è conseguenza dell'Assioma di Separazione, come testé dimostrato, ma quest'ultima visione di $\varnothing$ non contribuisce alla concretezza della sua immagine.

---

(14) – In modo rigoroso, introduciamo le abbreviazioni:

$$S \subseteq T \ \text{ o } \ T \supseteq S \ \text{ per } \ \forall x(x \in S \Rightarrow x \in T),$$

che si legge anche: "S *è un sottoinsieme di* T ", oppure: "T *è un soprainsieme di* S ", oppure "S *è contenuto in* T", oppure "T *contiene* S", oppure "S *è incluso in* T", o anche "T *include* S", o infine "S *è una parte di* T".

---

(15) – Introduciamo le abbreviazioni

$$S \not\subseteq T \text{ o } T \not\supseteq S \text{ per } \neg S \subseteq T,$$

e diciamo anche che "S *non è un sottoinsieme* di T", oppure "T *non è un soprainsieme* di S", oppure "S *non è contenuto in* T", oppure "T *non contiene* S", oppure "S *non è incluso in* T", o anche "T *non include* S", o infine "S *non è una parte di* T".

Dalla definizione di inclusione segue che se $S \not\subseteq T$ allora:

$$\neg \forall x (x \in S \Rightarrow x \in T)$$

che, per i teoremi logici (complementi A e B a questo capitolo), diventa $\neg \forall x (\neg x \in S \vee x \in T)$ oppure $\exists x \neg (\neg x \in S \vee x \in T)$ ovvero $\exists x (x \in S \wedge \neg x \in T)$ cioè:

$$\exists x (x \in S \wedge x \notin T);$$

che a parole vuol dire: se S non è un *sottoinsieme* di T allora esiste almeno un elemento di S che non è elemento di T.

---

(16) – Riprendiamo il ragionamento svolto in nota 13.

$\forall x(x\in\varnothing\Rightarrow x\in S)$ è vero perché non si può trovare nessun x tale che $x\in\varnothing$ e $x\notin S$, e questo semplicemente perché non si può trovare nessun x tele che $x\in\varnothing$; quindi non c'è bisogno di continuare la ricerca.
Si faccia attenzione all'uso disinvolto, e tipico dell'esposizione matematica, qui e altrove, della parola "*vero*"; a rigore, tutto quello che è affermato è dimostrato, con una dimostrazione logica dagli assiomi della teoria e dagli assiomi logici, senza riferimento a una "*verità*" che la logica insegna essere indefinibile, col Teorema di Tarski.

D'altra parte se volessimo chiederci dove si deve andare a cercare un x tale che . . . ., si potrebbe essere in imbarazzo. Invece nella costruzione della dimostrazione formale, avvalendoci dei teoremi logici dimostrati nei complementi a questo capitolo, la possibilità di scrivere x in una posizione opportuna è regolata dalle leggi; cioè

$$\forall x(x\in\varnothing\Rightarrow x\in S)$$

è una formula sintatticamente corretta del nostro linguaggio e su di essa possiamo operare tramite gli assiomi logici.

Partiamo quindi da essa, o meglio dalla sua negazione che è una formula altrettanto corretta

$$\neg\forall x(x\in\varnothing\Rightarrow x\in S)$$

che traduce $\varnothing\not\subseteq S$, e facciamo vedere che conduce ad una contraddizione con l'Assioma dell'Insieme Vuoto, cioè con $\forall x(x\notin\varnothing)$ ovvero $\forall x\neg(x\in\varnothing)$ oppure

$$\neg\exists x(x\in\varnothing).$$

Infatti $\neg\forall x(x\in\varnothing\Rightarrow x\in S)$ implica (ed è implicato da)

$$\neg\forall x\neg(\neg x\in S\wedge x\in\varnothing)$$

(perché se A e B sono formule allora $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge A)$), che per la commutatività di $\wedge$ implica (ed è implicata da)

$$\neg \forall x \neg (x \in \varnothing \wedge \neg x \in S);$$

ma quest'ultima formula è equivalente all'altra

$$\exists x \neg (\neg (x \in \varnothing \wedge \neg x \in S))$$

(perché vale un altro teorema logico: $\forall x A \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A$, dove A è una formula), e infine per la doppia negazione (teorema logico: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$) diventa

$$\exists x (x \in \varnothing \wedge \neg x \in S),$$

che implica (per la regola della $\wedge$-ELIMINAZIONE: $A \wedge B \Rightarrow A$)

$$\exists x (x \in \varnothing).$$

Quest'ultima formula contraddice A_3 nella forma $\neg \exists x (x \in \varnothing)$ considerata in precedenza.

---

(17) – Dall'Assioma di Estensionalità e dagli Assiomi di Sostitutività dell'Uguaglianza segue

$$S = T \Leftrightarrow S \subseteq T \wedge T \subseteq S$$

che indica in generale un modo per dimostrare che S=T.

Grazie alle sole regole logiche si ha invece, per ogni S

$$S \subseteq S,$$

e per ogni S, T, e V

$$S \subseteq T \wedge T \subseteq V \Rightarrow S \subseteq V.$$

---

(18) – Scriviamo:

$$S \subset T \text{ oppure } T \supset S \text{ per } S \subseteq T \wedge S \neq T,$$

e diciamo in questo caso: "S *è un sottoinsieme proprio* di T", oppure "T *è un soprainsieme proprio* di S", oppure "S è *contenuto propriamente in* T", oppure "T *contiene propriamente* S", oppure "S *è incluso propriamente in* T", o anche "T *include propriamente* S", o infine "S *è una parte propria di* T".

Inoltre, introduciamo le abbreviazioni:

$$S \not\subset T \text{ oppure } T \not\supset S \text{ per } \neg S \subset T$$

e diciamo anche che "S *non è un sottoinsieme proprio di* T", oppure "T *non è un soprainsieme proprio di* S", oppure "S *non è contenuto propriamente in* T", oppure "T *non contiene propriamente* S", oppure "S *non è incluso propriamente in* T", o anche "T *non include propriamente* S", o infine "S *non è una parte propria di* T".

---

(19) – Da $S \neq \varnothing$ e $\varnothing \subseteq S$ segue la tesi.

---

(20) – L'Assioma di Separazione garantisce l'esistenza di sottoinsiemi di un insieme dato per ogni formula (corretta) che traduce una proprietà, e per questo è anche detto *Assioma dei Sottoinsiemi* o *di Isolamento* (in inglese: Axiom of Subsets).

In realtà la formula di separazione è uno *schema di formule*, vale a dire una lista infinita di formule che si ottiene facendo variare la sottoformula che traduce la proprietà, su tutte le possibili formule che rispettano la restrizione imposta dall'Assioma. Gli assiomi sono dunque infiniti, anche se sono dati da un numero finito di schemi; si dimostra che non si può evitare questa presentazione per la T.d.I., cioè assiomatizzare con un numero finito di postulati la stessa teoria.

Il limite dell'Assioma di Separazione consiste nel fatto che per definire insiemi c'è bisogno comunque di un insieme dato da cui separare appunto i sottoinsiemi. Tale limite si ripercuote sulle definizioni ricorsive (vedasi capitolo 4).

Per ovviare a questo inconveniente si introduce un nuovo assioma che, avendo a che fare con la definibilità, è uno S*chema* (*di Rimpiazzamento*). Esso tratta la definibilità di operazioni e riguarda perciò formule B(x,y), con eventuali altri parametri, che diciamo di tipo funzionale, per le quali, cioè, per ogni x, esiste al massimo un y per cui B(x,y).

Introduciamo l'abbreviazione ∃! per dire "esiste al massimo un ....", formalmente

$$\exists! y \mathrm{G}(y) \Leftrightarrow \exists y \forall z (\mathrm{G}(z) \Rightarrow z=y)$$

dove G(y) è una formula con la variabile libera y, e postuliamo:

A_4 ASSIOMA DI RIMPIAZZAMENTO

Per ogni formula B(x,y,. . . .) *con eventuali altri parametri diversi da* T

$$\forall x\exists! y B(x,y,\ldots) \Rightarrow \forall S\exists T\forall y(y\in T \Leftrightarrow \exists x\in S(B(x,y,\ldots))).$$

A parole. Se B è una formula (o *espressione*) del linguaggio con almeno due variabili x, y libere e univoca relativamente ad almeno una variabile, y, per ogni insieme S, esiste un insieme T che contiene tutti e soli gli elementi che stanno a un elemento di S, univocamente, nell'espressione descritta da B. Ovvero l'esistenza di un insieme S e di una *formula funzionale* applicata ad S implica l'esistenza di un altro insieme T tale che ogni elemento di S insieme a uno e uno solo di T soddisfano la formula. (o ancora, se avessimo già definito il termine "*immagine in una corrispondenza*", l'immagine di un insieme mediante una corrispondenza funzionale definibile nel linguaggio è un insieme).

Si noti che A_4, (ingl. *Replacement Axiom* o *Substitution Axiom*) come quasi tutti gli assiomi essenziali di ZF non postula l'esistenza di un insieme in modo assoluto, ma è anch'esso del tipo: "*se esiste un insieme e . . ., allora esiste anche l'insieme tale che* . . . .".

Dall'Assioma di Rimpiazzamento deriva, come anticipato, quello di Separazione nel seguente modo. Si consideri la formula

$$A(x,\ldots)\wedge(x=y),$$

dove A(x,. . . .) è una formula con la variabile x libera ed eventuali altre diverse da T, e indichiamola con B(x,y,....) che ovviamente è una formula con variabili libere diverse da T. Evidentemente $\forall x\exists! y B(x,y,\ldots)$, infatti se vi fossero due y, indicati con y_1 e y_2 tali che $y_1\neq y_2$, e $B(x,y_1,\ldots)$ e $B(x,y_2,\ldots)$, allora si avrebbe

$$A(x,. . . .)\wedge \wedge(x=y_1) \text{ e } A(x,. . . .)\wedge(x=y_2)$$

da cui $x=y_1$ e $x=y_2$ che per sostitutività da l'assurdo $y_1=y_2$.

B($x,y,$. . . .) rientra quindi nell'ipotesi dell'Assioma di Rimpiazzamento che implica $\forall S\exists T\forall y(y\in T\Leftrightarrow\exists x\in S(B(x,y,. . . .)))$, cioè A_4 implica, per la formula B($x,y,$. . . .) definita sopra, l'esistenza di un insieme T i cui elementi sono tutti e soli gli y per cui $\exists x\in S(B(x,y,. . . .))$, vale a dire per cui

$$\exists x\in S\wedge A(x,. . . .)\wedge(x=y)$$

ovvero, per la sostitutività e la $\exists$-ELIMINAZIONE, $y\in S\wedge A(y,. . . .)$, quindi per T si può scrivere

$$T=\{y\in S \mid A(y,. . . .)\}$$

con A(y,. . . .) priva di eventuali altri parametri uguali a T. Questo è proprio lo *Schema di Separazione* A_3.

L'Assioma di Separazione è quindi inutile, anzi diventa un teorema di ZF, come l'Assioma dell'Insieme Vuoto che deriva a sua volta (nota 13) dalla Separazione.

Facciamo vedere, dunque, che l'esistenza dell'insieme vuoto deriva dal Rimpiazzamento per la formula funzionale $x=y\wedge x\neq y$ univoca in y. Da A_4 si ha $\forall S\exists T\forall y(y\in T\Leftrightarrow\exists x\in S(x=y\wedge x\neq y))$ cioè per ogni insieme S esiste un insieme T i cui elementi sono tutti e soli quelli per cui $x\in S\wedge x=y\wedge x\neq y$, e per la sostitutività $y\in S\wedge y\neq y$, in altri termini, dal momento che almeno un insieme S esiste (vedasi nota 13) $T=\{y\in S \mid y\neq y\}$; che indichiamo anche con $\varnothing$, la cui unicità è garantita al solito dall'Assioma di Estensionalità.

Notiamo, infine, che in A_4 se S è vuoto anche T è vuoto, e che per la restrizione sul parametro T in B($x,y,$. . . .) vale quanto detto in nota 10.

COMPLEMENTO 1.A

Logica predicativa - Regole di Inferenza I

Una *derivazione* (logica) è una successione finita di formule opportunamente legate da regole (di inferenza) che costituiscono il cosiddetto *Calcolo della Deduzione Naturale*. Tale calcolo è in sostanza la struttura di ogni teorema, lemma o proposizione matematica.

Le regole, in generale, sono di due tipi: alcune richiedono di appendere formule alla derivazione da costruire, altre di aprire delle sottoderivazioni e chiuderle per tornare alla *derivazione principale*.

Eccone sei del primo tipo.

R_1 REGOLA DELLA PREMESSA

"A ogni stadio di una derivazione si può inserire una nuova riga con una formula qualsiasi, giustificata come PREMESSA".

R_2 REGOLA DELLA $\wedge$-ELIMINAZIONE

"Se in una riga precedente della derivazione occorre una formula $A \wedge B$, **si può aggiungere** A, **così come si può aggiungere** B, **giustificata come** $\wedge$-ELIMINAZIONE **dalla riga relativa in cui occorre** $A \wedge B$",

questa in realtà include due regole, che si possono schematizzare con

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad e \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

R_3 REGOLA DELLA $\wedge$-INTRODUZIONE

"Se in una riga precedente della derivazione occorrono una volta una formula A **e una volta una formula** B, **si può aggiungere** $A \wedge B$, **giustificata come** $\wedge$-INTRODUZIONE **dalle righe relative**",

si noti che la formulazione volutamente generica della regola non richiede in che ordine A e B devono occorrere, né che siano diverse; schematicamente si può rappresentare con

A, B

$A \wedge B$

R_4 REGOLA DELLA $\vee$-ELIMINAZIONE

"Se in una riga precedente della derivazione occorrono una volta una formula $A \vee B$ **e una volta la formula** $\neg A$ **(o rispettivamente** $\neg B$**), si può aggiungere** B **(o rispettivamente** A**), giustificata come** $\vee$-ELIMINAZIONE ",

anche questa regola, che è detta *sillogismo disgiuntivo*, include in realtà due regole, simultaneamente

$$\frac{A \vee B, \neg A}{A} \quad \text{e} \quad \frac{A \vee B, \neg B}{B}$$

R_5 REGOLA DELLA $\vee$-INTRODUZIONE

"Se in una riga precedente della derivazione occorre una formula A**, si può aggiungere** $A \vee B$**, così come si può aggiungere** $B \vee A$, **qualunque sia la formula** B**, giustificata come** $\vee$-INTRODUZIONE **dalla riga relativa**",

anche questa consta di due schemi

$$\frac{A}{A \vee B} \quad \text{e} \quad \frac{B}{B \vee A}$$

R_6 REGOLA DELLA ⇒-ELIMINAZIONE

"Se in una riga precedente della derivazione occorrono una volta una formula B **e una volta la formula** B⇒A**, si può aggiungere** A**, giustificata come** ⇒-ELIMINAZIONE **dalle righe relative"**,

la regola si chiama anche *taglio*, e tradizionalmente *modus ponens*; schematicamente

$$\frac{B, B \Rightarrow A}{A}$$

Sulla base di tali regole si possono già costruire derivazioni, ad esempio

1	$A \wedge (B \Rightarrow C)$	PREMESSA
2	$A \wedge B$	PREMESSA
3	$B \Rightarrow C$	∧-ELIMINAZIONE da 1
4	B	∧-ELIMINAZIONE da 2
5	C	⇒-ELIMINAZIONE da 3 e 4

Ogni *formula* di una derivazione di dice *derivabile* dalle formule che compaiono etichettate come premesse nella parte precedente della derivazione, mediante la derivazione che termina alla sua riga; l'ultima formula di una derivazione si chiama *conclusione* della derivazione. Ogni formula di una derivazione è conclusione della parte precedente della derivazione, che è ancora una derivazione.

Se B è derivabile da $A_1, \ldots, A_n$ si scrive

$$A_1, \ldots, A_n \mapsto B.$$

Nel nostro esempio $A \wedge (B \Rightarrow C), A \wedge B \mapsto C$. Nella notazione, l'ordine in cui sono indicate le A_i non riflette necessariamente l'ordine in cui le premesse occorrono nella derivazione. Sarebbe più corretto scrivere a sinistra $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Si dice che B è derivabile dall'insieme T di formule, e si scrive $T \mapsto B$, se B è derivabile da alcune formule che appartengono a T, non necessariamente tutte, come è certo il caso se T è infinito, perché in ogni derivazione occorrono solo un numero finito di premesse.

Questa proprietà per cui se $T \mapsto A$ allora $A_1, \ldots, A_n \mapsto A$ per qualche $A_1, \ldots, A_n \in T$, si chiama *compattezza sintattica*.

Se $T \subseteq T'$, e se $T \mapsto B$ allora ovviamente anche $T' \mapsto B$. Questa proprietà si chiama *monotonia*.

Le prossime regole contemplano la possibilità, arrivati a uno stadio di una derivazione, di aprire una *sottoderivazione*, la quale è un proseguimento della derivazione e continua ad essere numerata progressivamente, ma è messa in evidenza, ad esempio col rientro delle righe, e in sé è una derivazione che si svolge secondo tutte le regole del calcolo introdotte e da introdurre incluse quelle che provocano la apertura di una sottoderivazione. Una sottoderivazione, quindi, può configurarsi a sua volta come derivazione principale rispetto ad una sotto-sottoderivazione. Allora bisogna in realtà definire la nozione di *derivazione di profondità n*, da cui quella di derivazione risulta come caso particolare di profondità 0; le derivazioni di profondità n+1 saranno le sottoderivazioni delle derivazioni di profondità n.

R_7 REGOLA DI IMPORTAZIONE

"**A ogni stadio di una derivazione di profondità** n+1 **si può aggiungere una formula che occorre precedentemente alla apertura di essa giustificata come** IMPORTAZIONE **dalla riga relativa**".

Le regole che permettono di aprire derivazioni di profondità n+1 precisano anche le condizioni sotto cui si può chiudere la sottoderivazione e ritornare alla derivazione superiore di profondità n, come nel caso della seguente.

R_8 REGOLA DELLA ¬-ELIMINAZIONE

“A ogni stadio di una derivazione di profondità n **si può aprire una derivazione di profondità** n+1**, scrivendo una formula** ¬A**,** A **qualunque, giustificata come** ASSUNZIONE**; se nel corso della derivazione di profondità** n+1 **si ottiene una formula** B**, sia la formula** ¬B**,** B **qualunque, si può uscire e proseguire la derivazione di profondità** n **con l’aggiunta di** A**, giustificata come** ¬-ELIMINAZIONE”.

R_9 REGOLA DELLA ¬-INTRODUZIONE

“A ogni stadio di una derivazione di profondità n **si può aprire una derivazione di profondità** n+1**, scrivendo una formula qualunque** A**, giustificata come** ASSUNZIONE**; se nel corso della derivazione di profondità** n+1 **si ottiene una formula** B**, sia la formula** ¬B**,** B **qualunque, si può uscire e proseguire la derivazione di profondità** n **con l’aggiunta di** ¬A**, giustificata come** ¬-INTRODUZIONE”.

Per esempio: $A \Rightarrow B, \neg B \mapsto \neg A$

1 $A \Rightarrow B$ PREMESSA

2 $\neg B$ PREMESSA

2.1 A ASSUNZIONE

2.2 $A \Rightarrow B$ IMPORTAZIONE da 1

2.3 B $\Rightarrow$-ELIMINAZIONE da 2.1 e 2.2

2.4 $\neg B$ IMPORTAZIONE da 2

3 $\neg A$ $\neg$-INTRODUZIONE

Regole come la $\neg$-INTRODUZIONE fanno intravedere la possibilità di derivare una formula A dall'insieme vuoto di premesse, circostanza che si indicherà con $\mapsto A$, come nel seguente esempio: $\mapsto \neg(A \wedge \neg A)$

0.1 $A \wedge \neg A$ ASSUNZIONE

0.2 A $\wedge$-ELIM da 0.1

0.3 $\neg A$ $\wedge$-ELIM da 0.1

1 $\neg(A \wedge \neg A)$ $\neg$-INTRO

R_{10} REGOLA DELLA $\Rightarrow$-INTRODUZIONE

"A ogni stadio di una derivazione di profondità *n* si può aprire una derivazione di profondità *n*+1, scrivendo una formula qualunque A, **giustificata come** ASSUNZIONE**; a ogni stadio della derivazione di profondità *n*+1, in cui si sia pervenuti a una**

formula B **qualunque, si può uscire e proseguire la derivazione di profondità** *n* **con l'aggiunta di** A⇒B, **giustificata come** ⇒-INTRODUZIONE".

Per esempio: $A \Rightarrow B \mapsto \neg B \Rightarrow \neg A$

1	A⇒B	PREMESSA
1.1	¬B	ASSUNZIONE
1.1.1	A	ASSUNZIONE
1.1.2	A⇒B	IMPORT da 1
1.1.3	B	⇒-ELIM da 1.1.1 e 1.1.2
1.1.4	¬B	IMPORT da 1.1
1.2	¬A	¬-INTRO
2	¬B⇒¬A	⇒-INTRO

Se si confronta questo esempio con quello relativo a

$$A \Rightarrow B, \neg B \mapsto \neg A$$

si vede una somiglianza di scrittura; é l'uso della regola di ⇒-INTRODUZIONE che permette di trasformare la prima nella seconda, trasponendo l'antecedente dell'implicazione derivata ad una delle premesse.

INTERRUZIONE !

Per richiedere, GRATUITAMENTE, il volume completo contattare l'autore all'indirizzo E-Mail: mailto:angelo.de.luna@virgilio.it comunicando le proprie coordinate di posta elettronica e, facoltativamente, l'URL del proprio sito.

Campagna (SA), 18 settembre 2007 - Angelo De Luna -