1.7) - SOMME DIRETTE -
(APPROFONDIMENTO TEORICO)

DEFINIZIONE 1.7.1 (di somma diretta di sottospazi)

Sia V uno spazio vettoriale e $V_1, \dots, V_p$ suoi sottospazi. Sia $\underline{v}_i \in V_i$ $(i = 1, \dots, p)$

se $\underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_p = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{0}, \dots, \underline{v}_p = \underline{0}$

diciamo che la somma dei sottospazi $V_1, \dots, V_p$ è <u>diretta</u> e la denotiamo con

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_p .$$

PROPOSIZIONE 1.7.1 (condizione necessaria e sufficiente affinché una somma di sottospazi sia diretta)

Siano $V_1, \dots, V_p$, p sottospazi vettoriali di V. La loro somma è diretta se e solo se ogni vettore della somma si scrive in modo unico sotto forma di

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_p \quad \text{dove } \underline{v}_i \in V_i$$

con $i = 1, \dots, p$.

DIMOSTRAZIONE

L'implicazione inversa è quasi immediata ($\Leftarrow$), dall'espressione

$$\underline{0} = \underbrace{\underline{0} + \cdots + \underline{0}}_{p \text{ volte}}$$

dove, naturalmente, $\underline{0}$ appartiene ad ognuno dei V_i, si trae, essendo la somma indicata, per ipotesi, unica

$$\underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_p = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_i = \underline{0} \text{ con } i = 1, \ldots, p.$$

Dimostriamo adesso l'implicazione diretta ($\Rightarrow$). Supponiamo che l'espressione

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_p \quad \text{con } \underline{v}_i \in V_i \ (i = 1, \ldots, p)$$

non sia unica. Allora $\exists\ \underline{w}_i \in V_i \ (i = 1, \ldots, p)$ tali che

$$\underline{v} = \underline{w}_1 + \cdots + \underline{w}_p .$$

Eguagliando i secondi membri delle ultime due equazioni si ha:

$$\underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_p = \underline{w}_1 + \cdots + \underline{w}_p$$

da cui essendo $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p$ vettori di V, si ha: $(\underline{v}_1 - \underline{w}_1) + \dots + (\underline{v}_p - \underline{w}_p) = \underline{0}$

Poiché $\underline{v}_i - \underline{w}_i \in V_i$ $(i=1,\dots,p)$, dalla definizione di somma diretta risulta

$$\underline{v}_i = \underline{w}_i \quad (i=1,\dots,p).$$

Dunque l'espressione $\underline{v} = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_p$ con $\underline{v}_i \in V_i$ $(i=1,\dots,p)$ è unica. ∎

PROPOSIZIONE 1.7.2 (II condizione necessaria e sufficiente affinché una somma di due sottospazi sia diretta)

Siano U e W due sottospazi di V. La somma $U + W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

La condizione è necessaria $(\Rightarrow)$. Infatti se supponiamo $U \cap W \neq \{\underline{0}\}$, allora esiste un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $\underline{v} \in U$ e $\underline{v} \in W$.

Sia ora $\underline{u}+\underline{w} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, quindi $\underline{u} \in \mathcal{U}$ e $\underline{w} \in \mathcal{W}$.

Allora $\underline{u}+\underline{w} = (\underline{u}+\underline{v}) + (\underline{w}-\underline{v})$ con

$\underline{u}+\underline{v} \in \mathcal{U}$ e $\underline{w}-\underline{v} \in \mathcal{W}$, ma da $\underline{v} \neq \underline{0}$ segue

che $\underline{u} \neq \underline{u}+\underline{v}$ e $\underline{w} \neq \underline{w}-\underline{v}$ e l'espressione

$\underline{u}+\underline{w}$ non è unica.

La condizione è sufficiente ($\Leftarrow$). Supponiamo

dunque $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\underline{0}\}$ e sia

$$\underline{u}+\underline{w} = \underline{0} \quad \text{con } \underline{u} \in \mathcal{U} \text{ e } \underline{w} \in \mathcal{W}.$$

Se $\underline{u} \neq \underline{0}$ risulta $\underline{w} = -\underline{u}$, dunque esiste un

vettore non nullo comune a $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$, assurdo.

Allora $\underline{u} = 0$, ma ciò implica

$$\underline{0} + \underline{w} = \underline{0} \quad \text{cioè} \quad \underline{w} = \underline{0}$$ e la

somma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ è diretta. ∎

PROPOSIZIONE 1.~~7~~.3 (relazione di GRASSMANN per somme dirette)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$

due suoi sottospazi se la somma $\mathcal{U}+\mathcal{W}$ è diretta allora risulta

$$\dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W}.$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Se la somma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ è diretta allora $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\underline{0}\}$ e quindi $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = 0$. La relazione di GRASSMANN diventa, allora:

$$\dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W}. \quad \blacksquare$$

DEFINIZIONE 1.7.2 (di spazi supplementari)

Sia V uno spazio vettoriale. Due sottospazi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ tali che $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ sono detti <u>supplementari</u>. $\blacksquare$

PROPOSIZIONE 1.7.4 (esistenza del sottospazio supplementare)

In uno spazio vettoriale V di dimensione (finita) n, ogni sottospazio $\mathcal{U}$, di dimensione $m < n$, ammette almeno un sottospazio supplementare. Ogni sottospazio supplementare ha dimensione $n-m$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m\}$ una base di $\mathcal{U}$.
Essendo $m < n$, per il teorema della base incompleta, è possibile determinare $n-m$ vettori $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_{n-m}$ di V tali che il sistema $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m, \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_{n-m}\}$ sia una base per V. Evidentemente $\underline{f}_i \notin \mathcal{U}$, con $i = 1, \dots, n-m$, perché diversamente il sistema precedente sarebbe linearmente dipendente. Allora, se indichiamo con $\mathcal{W}$ lo spazio generato dai vettori $\underline{f}_1, \dots \underline{f}_{n-m}$, abbiamo

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\underline{0}\}$$

ed, essendo i vettori $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_{n-m}$ linearmente indipendenti,

$$\dim \mathcal{W} = n-m$$

Ma dal fatto che $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\underline{0}\}$ segue che la somma dei sottospazi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ è diretta e, Per la proposizione 1.8.3, si ha

$$\dim(U \oplus W) = m + (n-m) = n.$$

Da qui, per la proposizione 1.7.3 dato che $U \oplus W$ è un sottospazio di V, segue

$$U \oplus W = V.$$

Dunque U e W sono supplementari. ■

Concludiamo il capitolo con una considerazione finale. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Se $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ è una base per V sappiamo che ogni vettore di V si decompone in modo unico rispetto a tale base:

$$\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n \quad \text{con } x_i \in \mathbb{K} \ (i = 1, \dots, n).$$

Detti allora E_i $(i = 1, \dots, n)$ gli n sottospazi di V generati da ogni singolo vettore della base $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, risulta, banalmente, che

$$V = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$$

cioè V è somma diretta dei sottospazi generati dai singoli vettori della sua base.

ESERCIZIO 1.7.1

Assegnati i seguenti sottoinsiemi H_1 e H_2 di $\mathbb{R}^4$

$$H_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y=0 \land z+t=0\}$$

$$H_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z-t=0\}$$

Determinare una base e la dimensione di

H_1, H_2, $H_1 \cap H_2$, $H_1 + H_2$.

SOLUZIONE

Per determinare una base di H_1 è sufficiente risolvere il sistema costituito dalle sue equazioni caratteristiche.

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=-t \end{cases}$$

Posto $x=\alpha_1$ e $\cancel{x}\, t=\alpha_2$ si ha:

$$\begin{cases} x=\alpha_1 \text{ (arbitrario)} \\ y=-2\alpha_1 \\ z=-\alpha_2 \\ t=\alpha_2 \text{ (arbitrario)} \end{cases}$$

; dunque se $(x,y,z,t) \in H_1$

esso è del tipo

$$(\alpha_1, -2\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_2), \text{ con } \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$ Ma si ha

$$(\alpha_1, -2\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_1, -2\alpha_1, 0, 0) + (0, 0, -\alpha_2, \alpha_2) =$$

$$= \alpha_1(1, -2, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, -1, 1)$$

e ciò dimostra che H_1 è generato dal sistema costituito dai due vettori:

$$\{(1, -2, 0, 0); (0, 0, -1, 1)\}$$

il quale è linearmente indipendente, infatti da $\alpha_1(1, -2, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, -1, 1) = (0, 0, 0, 0)$ segue $(\alpha_1, -2\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_2) = (0, 0, 0, 0)$ che implica $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$. Concludiamo allora che il sistema $\{(1, -2, 0, 0); (0, 0, -1, 1)\}$ è una base di H_1 che pertanto ha dimensione 2 ($\dim H_1 = 2$).

Si fa allo stesso modo per H_2, in questo caso dobbiamo risolvere il sistema costituito dalla sola equazione caratteristica di H_2:

$z - t = 0 \Rightarrow z = t$; posto $t = \alpha_1 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{cases} z = \alpha_1 \\ t = \alpha_1 \end{cases}$$ che ci dice che t e z sono arbitrari

ma uguali tra di loro ed inoltre che x e y sono del tutto arbitrari dunque $x = \alpha_3$ e $y = \alpha_2$ con $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$;

$$\begin{cases} x = \alpha_3 \text{ (arbitrario)} \\ y = \alpha_2 \text{ (arbitrario)} \\ z = \alpha_1 \\ t = \alpha_1 \text{ (arbitrario)} \end{cases}$$

Dunque $x (x, y, z, t) \in H_2$ esse è del tipo

$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1)$, con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Ma si ha:

$$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1) = (0, 0, \alpha_1, \alpha_1) + (0, \alpha_2, 0, 0) + (\alpha_3, 0, 0, 0) =$$

$$= \alpha_1 (0, 0, 1, 1) + \alpha_2 (0, 1, 0, 0) + \alpha_3 (1, 0, 0, 0)$$

e ciò dimostra che H_2 è generato dal sistema costituito dai tre vettori

$$\{(0,0,1,1);(0,1,0,0);(1,0,0,0)\}$$

il quale è linearmente indipendente, infatti da $\alpha_1(0,0,1,1)+\alpha_2(0,1,0,0)+\alpha_3(1,0,0,0)=(0,0,0,0)$ segue $(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1)=(0,0,0,0)$ che implica $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ ed $\alpha_3=0$. Concludiamo allora che il sistema suddetto è una base di H_2 che pertanto ha dimensione 3 ($\dim H_2=3$).

Il sottospazio intersezione $H_1\cap H_2$ è definito dalle due equazioni caratteristiche di H_1 e dalla sola equazione caratteristica di H_2:

$$H_1\cap H_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y=0 \wedge z+t=0 \wedge z-t=0\}.$$

Per determinarne una base è quindi sufficiente risolvere il sistema costituito dalle sue tre equazioni caratteristiche:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ z+t=0 \\ z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ t+t=0 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ 2t=0 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ t=0 \\ z=0 \end{cases}$$; posto $x=\alpha\in\mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=-2\alpha \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$$. Dunque se $(x,y,z,t)\in H_2\cap H_t$ esso è del tipo

$(\alpha,-2\alpha,0,0)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$. Ma si ha

$(\alpha,-2\alpha,0,0)=\alpha(1,-2,0,0)$, e ciò dimostra che $H_2\cap H_t$ è generato dal sistema costituito dal solo vettore, $\{(1,-2,0,0)\}$ che essendo non nullo risulta linearmente indipendente. Concludiamo che il sistema $\{(1,-2,0,0)\}$ è una base di $H_1 \cap H_2$ che pertanto ha dimensione 1 ($\dim(H_1 \cap H_2) = 1$).

Vediamo, infine, di dedurre qualcosa su $H_1 + H_2$ dalla formula di GRASSMANN:

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

e cioè
$$\dim(H_1 + H_2) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Se $\dim(H_1 + H_2) = 4$, essendo $H_1 + H_2$ un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, per il corollario 1.7.1 (della dimensione), vuol dire che

$$H_1 + H_2 = \mathbb{R}^4$$

e una sua base è un qualsiasi sistema costituito da 4 vettori linearmente indipendenti, ad esempio si può prendere la base canonica di $\mathbb{R}^4$

$$\{(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)\}.$$

■

Si noti che la somma $H_1 + H_2$ NON È DIRETTA perché $H_1 \cap H_2 \neq \{\underline{0}\}$