1.5) - DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE -

DEFINIZIONE 1.5.1 (di dipendenza ed indipendenza lineare)

Un sistema $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è detto <u>linearmente dipendente</u> oppure <u>legato</u> se esiste un sistema di scalari $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ <u>non tutti nulli</u> tali che

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

In questo caso si dirà pure che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono <u>linearmente dipendenti</u>.
Viceversa, il sistema S è detto <u>linearmente indipendente</u> oppure <u>libero</u> se la relazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

<u>implica</u> $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. In questo caso si dirà pure che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono <u>linearmente indipendenti</u>. ∎

Dimostriamo adesso le proprietà salienti dei sistemi legati.

PROPOSIZIONE 1.5.1 (Condizione sufficiente di dipendenza lineare)

Se un vettore di un sistema di vettori di V è nullo, il sistema è legato.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il sistema $\{\underline{v}_1 = 0, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$

La relazione $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ è soddisfatta per $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$, cioè il sistema $\{\underline{0}, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ è legato. ∎

Come caso particolare, per $n = 1$, la proposizione precedente implica che il sistema $\{\underline{0}\}$ costituito dal solo vettore nullo è legato.

PROPOSIZIONE 1.5.2 (Condizione necessaria e sufficiente di dipendenza lineare)

Un sistema costituito da più di un vettore di V è linearmente dipendente se e solo se almeno uno dei suoi elementi è combinazione lineare dei rimanenti (o dipende linearmente dai rimanenti).

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo l'implicazione diretta ($\Rightarrow$).
Sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ un sistema legato costituito da più di un vettore di V ($n>1$).
Allora l'equazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

è soddisfatta per almeno un sistema di scalari $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ non tutti nulli.
Senza perdita di generalità, pena la rinumerazione di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, possiamo assumere

$\alpha_1 \neq 0$, allora moltiplicando ambo i membri per lo scalare $\frac{1}{\alpha_1}$ si ha:

$$\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n\right) = \frac{1}{\alpha_1}\underline{0}$$

cioè
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1}\underline{v}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underline{v}_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\underline{v}_n = \underline{0}$$

ovvero
$$\underline{v}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underline{v}_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\underline{v}_n = \underline{0}$$ ed

infine per la regola del trasporto:

$$\underline{v}_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\underline{v}_2 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1}\underline{v}_n$$

e la combinazione lineare del secondo membro esiste perché per ipotesi è $n>1$.

Dimostriamo l'implicazione inversa ($\Leftarrow$). Supponiamo, senza perdita di generalità, dopo una eventuale opportuna rinumerazione degli indici, che sia $\underline{v}_1$ combinazione lineare dei rimanenti $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ elementi del sistema $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, cioè supponiamo che sia

$$\underline{v}_1 = \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$$

con $\beta_2, \ldots, \beta_n$ scalari opportuni. Applicando la regola del trasporto si ha:

$$-\underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n = \underline{0}$$ ovvero

$$(-1)\underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n = \underline{0}$$ che

è una combinazione lineare dei vettori $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ uguale al vettore nullo con scalari <u>non</u> tutti nulli $(-1 \neq 0)$ dunque $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti. ∎

PROPOSIZIONE 1.5.3 (monotonia di sistemi legati)

Se $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ è un sistema legato, un qualsiasi sistema che lo contiene è ancora legato.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

L'equazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

per ipotesi è soddisfatta da un sistema $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ di scalari <u>non</u> tutti nulli. Quindi qualunque siano i vettori $\underline{v}_{n+1}, \ldots, \underline{v}_m$ l'equazione

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n + \alpha_{n+1} \underline{v}_{n+1} + \ldots + \alpha_m \underline{v}_m = \underline{0}$$

è soddisfatta dal sistema

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_m\}$$

di scalari <u>non</u> tutti nulli. ■

Dimostriamo alcune le proprietà salienti dei sistemi liberi.

PROPOSIZIONE 1.5.4 (del singleton di $\underline{V}$)

Un sistema di un sol vettore di V diverso dal vettore nullo è libero.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Tenendo presente la legge di annullamento del prodotto risulta che, per $\underline{v} \neq \underline{0}$, l'equazione $\alpha \underline{v} = \underline{0}$ ha la sola soluzione $\alpha = 0$, cioè il sistema $\{\underline{v} \neq \underline{0}\}$ è libero.

PROPOSIZIONE 1.5.5 (Condizione necessaria di indipendenza lineare)

In un sistema libero nessun vettore è nullo e nessun vettore è uguale ad un altro.

DIMOSTRAZIONE

Questa proposizione è equivalente alla 1.5.1 e 1.5.2. Infatti se per assurdo un vettore di un sistema fosse nullo allora, per la proposizione 1.5.2, il sistema sarebbe legato. Inoltre se per assurdo un vettore di un sistema fosse uguale ad un altro vettore del sistema stesso, vuol dire che uno dei due è combinazione lineare dei rimanenti e, per la proposizione 1.5.2, il sistema sarebbe legato.

$\blacksquare$

La seconda parte della proposizione precedente assicura che un sistema libero è un insieme di n vettori di V.

PROPOSIZIONE 1.5.6 (monotonia di sistemi liberi)

Ogni sottosistema di un sistema libero è libero.

DIMOSTRAZIONE

Questa proposizione è equivalente alla 1.5.3. Infatti se per assurdo un sottosistema di un sistema di vettori fosse legato, allora, per la proposizione 1.5.3, il sistema di vettori sarebbe legato. ∎

Un importante risultato concernente i sistemi linearmente indipendenti è il seguente.

LEMMA 1.5.1 (di STEINITZ)

Dati due sistemi $S=\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $T=\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ di ordine rispettivamente n ed m di vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V.

Se S è linearmente indipendente ed i suoi elementi dipendono linearmente da quelli di T, cioè $\underline{v}_i \in L(T)$ con $i=1, \dots, n$, allora $n \leq m$.

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo esplicitamente che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti e quindi nessuno di essi può essere il vettore nullo e tantomeno può dipendere linearmente dai rimanenti.

Supponiamo, per assurdo, che $n>m$. In virtù della seconda ipotesi su S, esiste una relazione di dipendenza lineare del tipo

$$\underline{v}_1 = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \dots + \alpha_m \underline{w}_m .$$

Non tutti gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ possono

essere scelti, altrimenti si avrebbe $\underline{v}_1=\underline{0}$.
Senza ledere la generalità, dopo una eventuale opportuna rinumerazione degli elementi $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$, possiamo assumere che sia $\alpha_1 \neq 0$. Possiamo allora ricavare $\underline{w}_1$ ottenendo

$$\underline{w}_1 = \frac{1}{\alpha_1}\underline{v}_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\underline{w}_2 + \dots + \frac{-\alpha_m}{\alpha_1}\underline{w}_m$$

che prova che ogni combinazione lineare di $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ è anche una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$ e dunque, in particolare che gli elementi di S dipendono linearmente da $\underline{v}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$.
L'idea della dimostrazione consiste ora nel proseguire questa procedura sostituendo successivamente $\underline{w}_2, \underline{w}_3 \dots$ con $\underline{v}_2, \underline{v}_3 \dots$ finché tutti gli elementi $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ risultano sostituiti, ottenendo nel contempo che gli elementi di S dipendono linearmente da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$, contro il fatto che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

Procediamo per induzione, assumendo che ci sia un intero positivo r per cui $1 \le r < m$ e tale che, dopo una eventuale opportuna rinumerazione di $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$, gli elementi di S dipendono linearmente da

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_m .$$

Allora si ha

$$\underline{v}_{r+1} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_r \underline{v}_r + \gamma_{r+1} \underline{w}_{r+1} + \dots + \gamma_m \underline{w}_m .$$

Non può essere $\gamma_i = 0$ per ogni $i = r+1, \dots, m$ perché, altrimenti, otterremmo

$$\underline{v}_{r+1} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_r \underline{v}_r \quad \text{contro}$$

il fatto che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r$, e quindi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{r+1}$, sono linearmente indipendenti.

Rinumerando, se necessario, $\underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_m$, senza ledere la generalità possiamo assumere che sia $\gamma_{r+1} \neq 0$. Allora possiamo ricavare $\underline{w}_{r+1}$ ottenendo

$$\underline{w}_{r+1} = \frac{-\beta_1}{\gamma_{r+1}} \underline{v}_1 + \dots + \frac{-\beta_r}{\gamma_{r+1}} \underline{v}_r + \frac{1}{\gamma_{r+1}} \underline{v}_{r+1} + \frac{-\gamma_{r+2}}{\gamma_{r+1}} \underline{w}_{r+2} + \dots + \frac{-\gamma_m}{\gamma_{r+1}} \underline{w}_m$$

che prova che ogni combinazione lineare di

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_m$$

è anche combinazione lineare di

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{r+1}, \underline{w}_{r+2}, \dots, \underline{w}_m$$

e dunque, in particolare, che gli elementi di S dipendono linearmente da

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{r+1}, \underline{w}_{r+2}, \dots, \underline{w}_m .$$

Per induzione su r $(1 \leq r < m)$, quando $r = m-1$, ovvero $r+1 = m$, possiamo concludere che gli elementi di S, cioè $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, dipendono linearmente da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$, ma abbiamo già osservato che ciò è impossibile, perciò la nostra ipotesi (assurda) $n > m$ è falsa. Allora deve essere necessariamente $n \leq m$. ■

1.6) – BASE E DIMENSIONE –

I concetti introdotti in questo paragrafo e le conclusioni a cui perverremo, sono di fondamentale importanza per tutta l'algebra lineare. Avvisiamo pure che, d'ora in poi, parleremo semplicemente di spazio vettoriale V, senza specificare il campo ad esso associato.

DEFINIZIONE 1.6.1 (di base)

Chiameremo base di uno spazio vettoriale V un sistema di generatori di V linearmente indipendente – ■

Con tale definizione si ha che se un sistema di vettori è una base di V allora il sistema si riduce ad un insieme. Infatti è stato già fatto notare che in un sistema linearmente indipendente non può esserci ~~costituito~~ alcuna coppia di vettori uguali tra di loro.