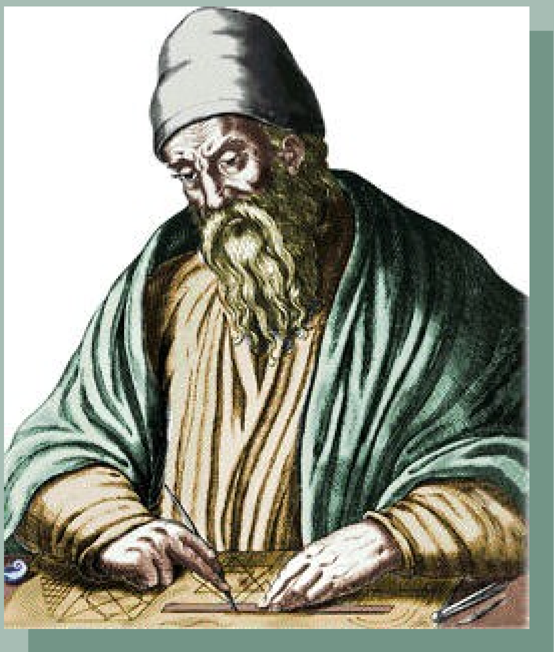
Angelo De Luna

Lo Spazio Affine EUCLIDEO REALE



con elementi di Teoria degli Insiemi, Gruppi, Campi e Spazi Vettoriali

nuova edizione

– dla –

Finito di stampare il 20 marzo 2009
presso De Luna Angelo
Via Oppidi-Varano, 31 – 84022 – Campagna (SA)
P.IVA 04582730653

a Carla

Indice

Capitolo 3

Capitolo 4

Appendice

Indice Analitico

Angelo [illegible]

PREFAZIONE

Il presente lavoro trae origine, prevalentemente, dall'esigenza di colmare una lacuna didattica, almeno per quanto riguarda la letteratura in lingua italiana, inerente al passaggio dalla Geometria Affine Euclidea Reale, sviluppata a partire dai cinque Assiomi di Euclide (così come viene introdotta fin dalle scuole inferiori), alla stessa Geometria fondata, però, sulla nozione astratta di Spazio Vettoriale Reale (proprio come viene trattata, invece, nei corsi di livello universitario).

Il testo consta di 4 ampi capitoli.

Nei primi due capitoli sono esposti i fondamenti di Euclide inquadrati nell'ambito della moderna Teoria degli Insiemi.

Nel terzo capitolo è introdotto l'Assioma Affine di Pappo, pervenendo così alla caratterizzazione della retta euclidea mediante la nozione di Campo.

Nel quarto capitolo, infine, sono presentati gli Assiomi d'ordine e l'Assioma di Dedekind, completando in tal modo la struttura dello Spazio Affine Euclideo Reale.

Nei complementi dei capitoli, ove sarà necessario per il prosieguo del lavoro, tratteremo nozioni di Teoria degli Insiemi, di Gruppo, Campo e Spazio Vettoriale, nonché alcune importanti questioni circa la coerenza dei Postulati di Euclide. In forma di complemento trova posto, naturalmente, anche la dimostrazione della suddetta equivalenza dei due differenti approcci alla Geometria Affine. Particolare rilievo si è dato, sempre in forma di complementi, alla nozione di ordine e agli Spazi Affini Euclidei di ordine finito, in quanto mi è parso un argomento, seppur ininfluente ai fini dello sviluppo della Teoria, troppo spesso ingiustamente trascurato.

Il volume termina con un'appendice in cui è esposta la generalizzazione al caso n-dimensionale dei principali risultati acquisiti.

Campagna (SA), 20 marzo 2009 — Angelo De Luna

Capitolo 1

LO SPAZIO AFFINE EUCLIDEO TRI-DIMENSIONALE $\mathcal{E}^3$

1.1 Gli Assiomi di Euclide e prime proprietà.

Sia $\mathcal{E}$ (lettera E maiuscola corsivo) un insieme di natura arbitraria [(1)] i cui elementi li chiamiamo *punti*. Supponiamo inoltre che $\mathcal{E}$ contenga sottoinsiemi di due tipi: i sottoinsiemi del primo tipo sono detti *rette*, quelli del secondo *piani*. In simboli, indichiamo i punti con le lettere A, B, C, ...,P, Q, ..., le rette con le lettere a, b, c, ..., r, s, ... ed i piani con le lettere α, β, γ, ...,σ, τ, ...; con o senza apici e/o indici [(2)].

Se una retta è inclusa in un piano diremo anche, ma più impropriamente, che *la retta appartiene al piano*; conveniamo, altresì, di chiamare *allineati* i punti che appartengono ad una stessa retta e *complanari* le rette e/o i punti che appartengono ad uno stesso piano.

Per comodità di espressione non ci atterremo strettamente al linguaggio della teoria degli insiemi. Così, usando espressioni di tipo geometrico, invece di dire «*il punto* P *appartiene alla retta r*» diremo anche «*la retta r passa per il punto* P»; invece di dire «*il punto* P *appartiene al piano* σ» diremo pure «*il piano* σ *passa per il punto* P»; invece di dire «*la retta r appartiene al piano* σ» diremo in modo equivalente «*il piano* σ *passa per la retta r*».

Ciò premesso, diamo la seguente:

Definizione 1.1.1

L'insieme $\mathcal{E}$ è detto *Spazio Affine Euclideo di dimensione* 3, e sarà indicato col simbolo $\mathcal{E}^3$, se in esso risultano soddisfatti i seguenti Assiomi (3) di Euclide (4):

E1	**Per due punti distinti passa una sola retta. Una retta passa per almeno due punti distinti.**

E2	**Per tre punti non allineati passa un solo piano. Un piano passa per almeno tre punti non allineati.**

E3	**Per una retta passa almeno un piano. Due piani aventi un punto in comune hanno in comune almeno una retta.**

E4	**Non tutti i punti sono complanari.**

E5	**Per un punto non appartenente ad una retta data passa una sola retta complanare con la retta data e non avente con questa alcun punto in comune.**

La coerenza di questo sistema assiomatico, e quindi l'esistenza di insiemi $\mathcal{E}^3$ da esso caratterizzati, è comprovata dal modello che illustreremo nel complemento 1.B. Per il momento notiamo quanto segue.

Gli Assiomi di Euclide (nella forma da noi proposta) sono in numero di cinque. I primi tre (E1, E2 ed E3), a differenza dei rimanenti (E4 ed E5), constano ognuno di due commi di contenuto informativo diverso, benché molto simili nella forma: essi stabiliscono, nell'ordine, relazioni di appartenenza tra punti e retta, tra punti e piano e tra rette e piano.

In particolare, tenendo presente quanto detto nella premessa alla Definizione 1.1.1, l'Assioma E1 primo comma si può tradurre dicendo che *due punti distinti sono sempre allineati*, mentre il secondo comma dello stesso assioma dice che *una retta è un insieme non vuoto perché costituito da almeno due punti distinti*. Inoltre, non può esistere in $\mathcal{E}^3$ un punto che non appartenga ad alcuna retta. Infatti, sempre nella premessa alla Definizione 1.1.1, si stabilisce che in $\mathcal{E}^3$ qualche retta *r* esiste e siccome la retta è un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{E}^3$, esiste in $\mathcal{E}^3$ almeno un punto R appartenente alla retta *r*. Sia ora P un punto qualsiasi di $\mathcal{E}^3$; è facile vedere che per esso passa almeno una retta. Due sono, infatti, le possibilità: il punto P appartiene alla retta *r* oppure non appartiene alla retta *r*. Se il punto P appartiene alla retta *r* la conclusione è ovvia; se, invece, il punto P non appartiene alla retta *r* allora esso è distinto dal punto R della retta *r* e, per l'Assioma E1 primo comma, deve esiste in $\mathcal{E}^3$ una retta (e solo una) passante per entrambi. Ne segue, data l'arbitrarietà della scelta del punto P, che *per un punto passa almeno una retta*.

L'Assioma E2 primo comma si può esprimere dicendo che *tre punti non allineati sono sempre complanari*, ed il secondo comma dello stesso Assioma ci dice che *un piano è un insieme non vuoto in quanto costituito da almeno tre punti non allineati*. Inoltre, *tre punti non allineati sono sempre distinti*. Infatti se così non fosse, nel caso trattasi di soli due punti distinti (perché solo due di essi coincidono) per l'Assioma E1 primo comma essi sono necessariamente allineati, nel caso invece trattasi di un solo punto (perché trattasi di tre punti coincidenti) per il fatto, visto prima, che per un punto passa almeno una retta, essi sarebbero ancora allineati. Ne segue, quindi, che *un piano è costituito da almeno tre punti distinti*.

Il terzo Assioma primo comma garantisce ch*e una retta è sempre un sottoinsieme di qualche piano*, e siccome per un punto passa almeno una retta, ne segue che *per un punto passa almeno un piano*, mentre il secondo comma del medesimo Assioma tiene conto di una proprietà auto-evidente dell'intersezione tra piani (anche coincidenti): *se due piani non sono disgiunti allora la loro intersezione contiene almeno una retta*.

Il quarto Assioma riguarda in qualche modo l'estensione di $\mathcal{E}^3$ stabilendo che $\mathcal{E}^3$ *non può coincidere con un suo piano perché costituito da almeno quattro punti non complanari* (5).

Inoltre si ha che *quattro punti non complanari sono sempre distinti*; infatti se così non fosse, per gli Assiomi E2 primo comma ed E1 primo comma, e per il fatto che per un punto passa almeno una retta la quale appartiene da almeno un piano, essi sarebbero complanari in ogni caso (rispettivamente: tre punti distinti, due punti distinti, un sol punto). Ne segue, quindi, che *in* $\mathcal{E}^3$ *esistono almeno quattro punti distinti*.

Si osservi infine che, per dedurre queste prime proprietà di $\mathcal{E}^3$, come accadrà in seguito per molte altre, non si è fatto uso dell'Assioma E5 (6) il quale, data la sua particolarità, sarà discusso separatamente più avanti, dimostrando tra l'altro (complemento 1.B), facendo uso proprio dell'Assioma E5, che un piano è costituito da almeno quattro punti distinti e che il più piccolo Spazio Affine Euclideo di dimensione 3 è costituito da otto punti distinti.

NOTE

(1) – Per la nozione di insieme, e di quelle ad essa correlate, vedasi il complemento 1A.

---

(2) – A tal proposito, uniformandoci al linguaggio della geometria algebrica, quando in seguito si parlerà di due o più punti, di due o più rette, oppure di due o più piani, si presti molta attenzione all'eventualità che alcuni di questi enti possono essere anche coincidenti, anche se sono indicati con due simboli diversi. Per esempio, frasi del tipo «*dati due punti*, P *e* Q», oppure del tipo «*siano r ed s due rette*», ed analoghe con o senza l'indicazione dei rispettivi simboli letterali, non esprimono la circostanza che gli enti di cui si parla siano necessariamente distinti. Quando ciò è vero, o vogliamo che lo sia, diremo in modo esplicito «*dati due punti distinti*, P *e* Q», oppure «*siano r ed s due rette distinte*», e così per i piani.

———

(3) – In letteratura, gli *assiomi* di una teoria sono talvolta chiamati anche *postulati*. Non esiste, però, una distinzione netta tra i due termini, anche se storicamente si è preferito usare la parola postulati nell'ambito di teorie prettamente geometriche, e quella di assiomi in tutti gli altri campi della matematica. In entrambi i casi, comunque, questi termini denotano proposizioni che esprimono proprietà poste alla base di una teoria e sono considerate vere perché auto-evidenti e quindi non dimostrabili a partire da altre più semplici, ma derivabili direttamente dalla intuizione; da esse poi discendono, mediante dimostrazioni rigorose, tutte le altre proposizioni, lemmi, teoremi e corollari della teoria stessa.

All'uopo ricordiamo pure che chiameremo *teorema* una proposizione di carattere conclusivo che si ricava col ragionamento logico, la *dimostrazione*. In esso si distingue l'*ipotesi*, ciò che si suppone, e la *tesi*, ciò che si vuole dimostrare. Si dice *lemma* una proposizione non conclusiva ai fini della teoria, ma viene impiegata come premessa di uno o più teoremi: dunque i lemmi occupano posizioni centrali nell'ambito di una teoria ed uno stesso lemma, una volta dimostrato, può essere utilizzato in teorie di contenuto anche molto diverso tra di loro. Si dice *corollario* una proposizione che è conseguenza immediata, o caso particolare, di uno o più proposizioni già dimostrate. Spesso il termine *proposizione*, quando non riferito ad un assioma, è sinonimo di piccolo teorema.

———

(4) – Il sistema assiomatico di Euclide, apparso per la prima volta nei suoi *Elementi* intorno al 300 a.C., ha avuto una diffusione così ampia da essere seconda soltanto a quella della Bibbia; il suo rigore e la sua accuratezza hanno di frequente suscitato ammirazione.

———

(5) – Un piano, invero, non è mai sottoinsieme di alcuna retta; infatti l'Assioma E2 secondo comma garantisce che un piano contiene almeno tre punti non appartenenti ad una stessa retta. Questo è intuitivo, ma si doveva evidenziare. Ne deriva quindi una struttura incapsulata per $\mathcal{E}^3$: le rette sono sottoinsiemi propri di piani oltre che di $\mathcal{E}^3$, i piani a loro volta sono sottoinsiemi propri di $\mathcal{E}^3$. Questo è il motivo per cui, quando ci si riferisce ad una retta, occorre sempre precisare se essa è intesa come sottoinsieme di un piano, in tal caso diremo per esempio «*sia r una retta del piano* σ», oppure è intesa come sottoinsieme di tutto lo spazio, e in tal caso diremo invece «*sia r una retta di* $\mathcal{E}^3$», o locuzioni simili. Per i pini, invece,

non c'è bisogno di ulteriori specificazioni, avendo questi $\mathcal{E}^3$ quale unico soprainsieme. Resta tuttavia aperta la questione se un punto di un piano appartiene sempre a qualche retta del piano medesimo (per questo vedasi nota *).

---

(6) – Per importanti questioni che analizzeremo in seguito, si prenda nota fin d'ora delle proprietà che dipendono dal quinto Assioma di Euclide (E5) distinguendole da quelle che invece sono indipendenti da esso. Per agevolare il Lettore in tale compito, le prime saranno contrassegnate con un segno di asterisco in apice (*).

1.2 Proprietà di appartenenza in $\mathcal{E}^3$.

Conseguenze immediate degli Assiomi di Euclide sono le seguenti proprietà di appartenenza in $\mathcal{E}^3$ sussistenti tra punti e rette, punti e piani, rette e piani.

Proposizione 1.2.1

Due rette distinte hanno al più un punto in comune.

DIMOSTRAZIONE

Se, per assurdo, due rette distinte di $\mathcal{E}^3$, r ed s, avessero più di un punto in comune allora (con riferimento [7] alla figura 1) detti P e Q due pun-

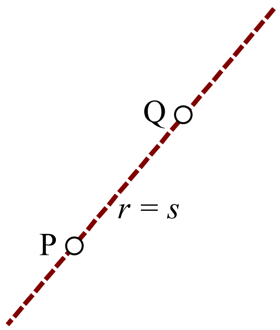


fig.1

ti distinti siffatti, per essi passerebbero entrambe le rette date, le quali sono distinte per ipotesi, ma ciò contraddice il primo comma dell'Assioma E1. ■

Proposizione 1.2.2

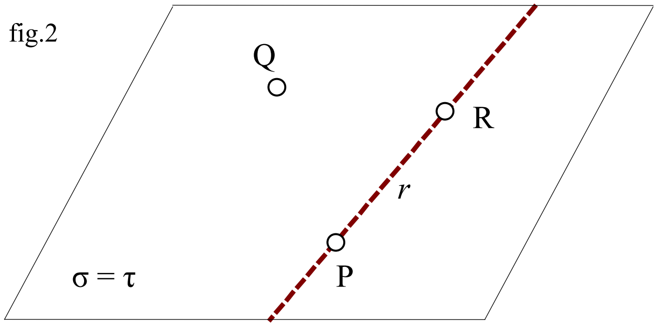
Due piani distinti hanno al più una retta in comune.

DIMOSTRAZIONE

Se due piani distinti non hanno alcun punto in comune allora la proposizione è ovvia, dato che una retta è un insieme non vuoto.

Se, invece, due piani distinti hanno almeno un punto in comune, l'Assioma E3 secondo comma garantisce che essi hanno in comune una retta *r* (almeno una); la proposizione è dimostrata dal fatto che in questo caso i punti di tale retta sono i soli che i due piani distinti possono avere in comune tra di loro.

fig.2



Infatti siano, per assurdo, σ e τ due piani distinti aventi in comune oltre ad una retta *r* anche un punto Q non appartenente a questa (figura 2), allora, per l' Assioma E1 secondo comma, i due piani avrebbero in comune almeno i due punti distinti P ed R della retta *r*, oltre al punto Q non appartenente alla retta *r*. In tal caso, invero, l'Assioma E2 primo comma garantisce che il piano σ coincide col piano τ perché entrambi passanti per i tre punti non allineati, P Q ed R, contro il fatto che, per ipotesi, i piani in questione sono distinti. ■

L'argomentazione dalla proposizione precedente, unitamente all'Assioma E3 secondo comma, permette di affermare che l'intersezione di due piani distinti aventi un punto in comune è una retta passante per detto punto; quindi diciamo pure:

Corollario 1.2.1

Due piani distinti aventi un punto in comune hanno in comune solo una retta passante per esso.

E ovviamente, se i punti distinti in comune tra due piani distinti sono due:

Corollario 1.2.2

Due piani distinti aventi due punti distinti in comune hanno in comune solo la retta passante per essi.

Vale inoltre il seguente notevole:

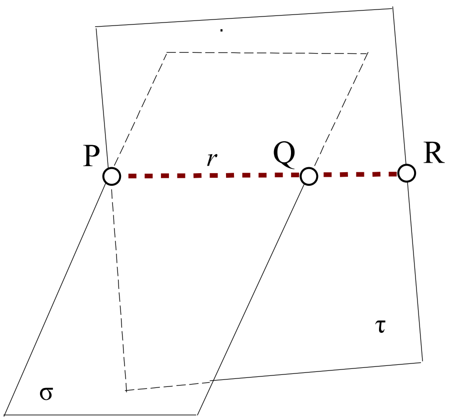
Lemma 1.2.1

Una retta avente due punti distinti in comune con un piano appartiene ad esso.

DIMOSTRAZIONE

Siano (con riferimento alla figura 3) P e Q due punti distinti di $\mathcal{E}^3$ che una retta *r* di $\mathcal{E}^3$ ha in comune con un piano σ.

fig.3



Se la retta *r* è costituita solo dai punti P e Q la tesi è ovvia.

Sia, dunque, R un terzo punto della retta *r*, distinto da P e Q, e supponiamo per assurdo che esso, e quindi anche la retta *r*, non appartenga al piano σ. Sia, inoltre, τ il piano (la cui esistenza è garantita dall'Assioma E3 primo comma) passante per la retta *r* [8]; detto piano, come il piano σ, contiene i punti distinti P e Q, ma, a differenza di σ, contenente anche il punto R, pertanto τ e σ sono piani distinti. Per il Corollario 1.2.2, i piani distinti σ e τ, avendo in comune i due punti distinti P e Q, hanno in comune la retta *r* passante per essi, ma allora anche il punto R di *r* appartiene ad entrambi i piani: in particolare il punto R appartiene al piano σ, contro quanto abbiamo supposto all'inizio. Questo assurdo dimostra, data l'arbitrarietà del punto R sulla retta *r*, che non può esistere un punto della retta *r*, distinto da P e Q, il quale non appartenga anche al piano σ passante per P e Q; in altre parole, la retta *r* appartiene al piano σ. ■

Allora possiamo dire:

Proposizione 1.2.3

Per una retta ed un punto fuori di essa passa un solo piano.

DIMOSTRAZIONE

Siano (ci si può riferire ancora alla figura 2) P ed R due punti distinti di $\mathcal{E}^3$ appartenenti, in forza dell'Assioma E1 primo comma, alla retta *r* di $\mathcal{E}^3$, e sia Q un punto di $\mathcal{E}^3$ fuori di essa. I tre punti P, Q ed R sono, dunque, non allineati. Il piano σ passante per i tre punti non allineati P, Q ed R, la cui esistenza ed unicità sono garantite dall'Assioma E2 primo comma, avendo in comune con la retta *r* i due punti distinti P ed R, per il Lemma 1.2.1, deve passare per essa. ■

Possiamo anche rafforzare una proprietà rilevata in precedenza:

Corollario 1.2.3

Per una retta passano almeno due piani distinti.

DIMOSTRAZIONE

Sia *r* una retta qualsiasi di $\mathcal{E}^3$ e σ un piano passante per essa (ne esiste almeno uno per l'Assioma E3 primo comma). L'Assioma E4 garantisce l'esistenza di almeno un punto T di $\mathcal{E}^3$ non appartenete al piano σ e quindi nemmeno alla retta *r*. La Proposizione 1.2.3, per contro, garantisce l'esistenza (e l'unicità) del piano τ passante per la retta *r* ed il punto T fuori di essa, che pertanto è distinto dal piano σ perché questo non passa per il punto S. L'arbitrarietà della scelta della retta r dimostra il corollario. ∎

Infine si ha:

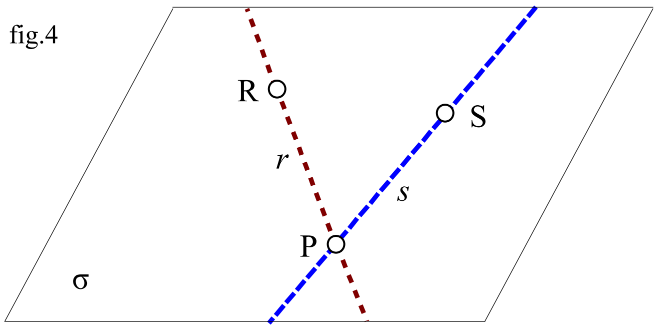
Corollario 1.2.4

Per due rette distinte aventi un punto in comune passa un solo piano.

DIMOSTRAZIONE

Sia P (figura 4) il punto in comune di due rette distinte r ed s di $\mathcal{E}^3$.

fig.4



L'Assioma E1 secondo comma garantisce l'esistenza di un punto R della retta r distinto da P e di un punto S della retta s distinto anch'esso da P. Siccome le rette r ed s sono per ipotesi distinte, il punto R è necessariamente distinto dal punto S, altrimenti per l'Assioma E1 primo comma le rette in questione coinciderebbero perché, in tal caso, passerebbero entrambe per la stessa coppia di punti distinti; in particolare i tre punti P, R ed S non sono allineati. Per il Lemma 1.2.1, il piano σ passante per i punti non allineati P, R ed S, la cui esistenza ed unicità è sancita dall'Assioma E2 primo comma, contiene sia la retta r, perché passa per i punti distinti P ed R di r, che la retta s, perché passa per i punti distinti P ed S di s. ∎

E reciprocamente:

Corollario 1.2.5

Un piano passa per almeno due rette distinte aventi un punto in comune.

DIMOSTRAZIONE

Sia σ un piano (ci si può riferire ancora alla figura 4). L'Assioma E2 secondo comma afferma che il piano σ passa per tre punti non allineati (quindi distinti) P, R ed S di $\mathcal{E}^3$. In forza dell'Assioma E1 primo comma, sia r la retta di $\mathcal{E}^3$ passante per i punti distinti P ed R, ed s la retta di $\mathcal{E}^3$ passante per i punti distinti P ed S; per la condizione di non allineamento dei punti P, R ed S si ha che r è distinta da s e che, per il Lemma 1.2.1, esse appartengono entrambe al piano σ. ■

N O T E

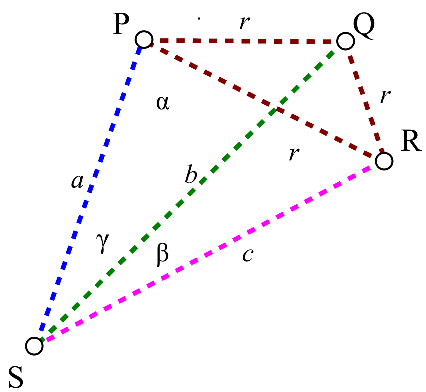
(7) – L'insieme $\mathcal{E}^3$ e i suoi sottoinsiemi, in particolare le rette ed i piani, sono insiemi di elementi di natura del tutto arbitraria di cui si sono soltanto stabilite delle condizioni di esistenza e delle relazioni di appartenenza, o di inclusione, mediante gli Assiomi E1, E2, E3, E4 ed E5. I simboli grafici della figura 1, pertanto, come quelli delle successive figure del presente capitolo, cioè i cerchietti, le linee punteggiate ed i quadrilateri rappresentano rispettivamente i punti, le rette ed i piani solo nei riguardi delle suddette condizioni di esistenza e relazioni di appartenenza. In altre parole, allo stadio attuale della costruzione non abbiamo ancora alcuna cognizione metrica di tali oggetti matematici, anzi, per la verità, non sappiamo ancora dire neppure cosa sia una retta o un piano, se non che essi sono particolari sottoinsiemi di $\mathcal{E}^3$, ma non sappiamo ancora, per esempio, che la retta è una linea di curvatura nulla (diritta), continua e di lunghezza infinita, o che il piano è una superficie (piatta) estendendosi indefinitamente nello spazio, così come l'intuizione dello spazio fisico reale, in cui viviamo, ci suggerisce. I imboli grafici delle figure, per il momento, servono solo a ricordarci, rappresentandole, relazioni puramente insiemistiche esistenti (o non esistenti) tra detti oggetti. Quando il punto, la retta ed il piano diventeranno proprio quelli che conosciamo, cioè oggetti della geometria affine reale dotati quindi di proprietà di estensione e forma ben precise (cosa che faremo in seguito con l'introduzione di ulteriori assiomi atti a precisare le caratteristiche d'ordinamento e quelle topologiche, pervenendo così

alla definizione di Sazio Affine Euclideo Reale), solo allora i simboli grafici corrisponderanno pienamente a punti, linee e superfici reali.

---

(8) – Osserviamo esplicitamente che, per questa dimostrazione, non si può prescindere dal primo comma dell'Assioma E3 (cioè dal fatto che in $\mathcal{E}^3$ non possono esistere rette che non appartengano ad alcun piano) se si vuole essere certi dell'esistenza del piano τ passante per la retta *r*. In assenza di questo comma, infatti, sarebbe possibile (figura 5) un modello di $\mathcal{E}^3$ compatibile con gli Assiomi di Euclide (tranne l'Assioma E5 il quale, per motivi che saranno precisati più tardi, utilizzeremo il meno possibile) costituito dai punti allineati P, Q ed R, con R non appartenente al piano γ, e con l'aggiunta di un quarto punto S appartenente al piano γ e non allineato con i primi tre punti. Tale insieme sarebbe strutturato secondo tre piani (il piano γ, appunto, costituito dai tre punti non allineati P, Q ed S; il piano α costituito dai tre punti non allineati P, R ed S; il piano β costituito dai tre punti non allineati Q, R ed S) e quattro rette (la retta *r* costituita dai tre punti P, Q ed R e non appartenente interamente ad alcun piano; la retta *a* costituita dai due punti distinti P ed S, comune ai piani distinti γ ed α; la retta *b* costituita dai due punti distinti Q ed S, comune ai piani distinti γ e β; la retta *c* costituita dai due punti distinti R ed S, comune ai piani distinti α e β). Si noti che i primi quattro Assiomi di Euclide, tranne il comma in questione, sono soddisfatti, ma tale struttura, data "l'atipicità" della retta *r*, non corrisponde pienamente all'idea intuitiva che abbiamo dello spazio ordinario.

fig.5



Avvertiamo, altresì, che non pochi Autori, al fine di evitare la suddetta precisazione, sostituiscono (spesso in modo brutale se non addirittura inconsapevole) il terzo Assioma direttamente con l'enunciato del Lemma 1.2.1 che noi, invece, abbiamo fatto discendere, in ultima analisi, dagli Assiomi E1, E2 ed E3. La nostra scelta è giustificata dal fatto che sebbene tale lemma è di fatto del tutto equivalente (in presenza di E1 ed E2) all'Assioma E3, tuttavia il suo contenuto informativo risulta meno immediato di quello dei commi dell'Assioma E3 presi singolarmente.

1.3 Incidenza di rette, di retta e piano, di piani.

Come visto all'inizio del primo paragrafo, lo Spazio Affine Euclideo di dimensione 3, $\mathcal{E}^3$, contiene dei sottoinsiemi non vuoti detti piani, i quali, per l'Assioma E2 secondo comma, contengono ognuno almeno tre punti

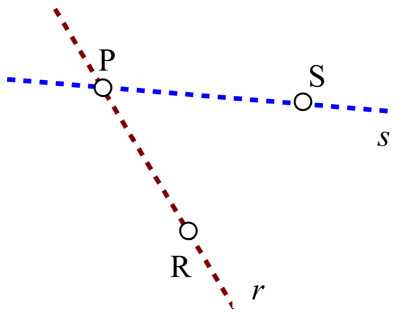


fig.6

P, R ed S non allineati e quindi distinti (figura 6). Per l'Assioma E1 primo comma, allora, siamo certi della esistenza in $\mathcal{E}^3$ di rette distinte, per esempio la retta r passante per i punti distinti P ed R, e la retta s passante per i punti distinti P ed S, le quali hanno il punto P in comune. Risulta, pertanto, ben posta la:

Definizione 1.3.1

Due rette distinte aventi un punto in comune sono dette *rette incidenti* o *rette secanti*.

Di più, abbiamo visto che, oltre al piano σ individuato dai tre punti non allineati P, R ed S (figura 7), esiste in $\mathcal{E}^3$ anche un quarto punto T non appartenente a detto piano σ: l'Assioma E1 primo comma garantisce l'esistenza in $\mathcal{E}^3$ della retta *t* passante per i punti distinti P e T, non appartenente al piano σ, ma avente con esso un punto in comune.

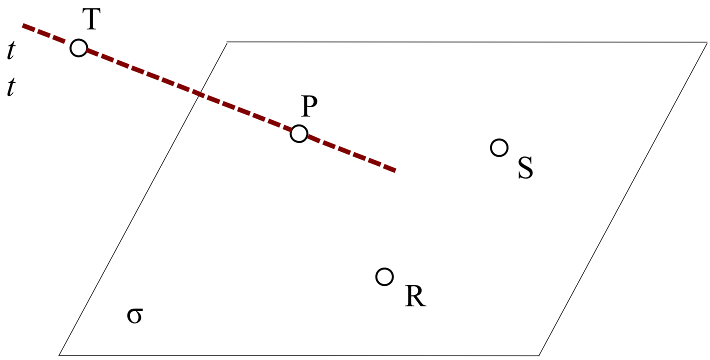


fig.7

Ciò giustifica la seguente:

Definizione 1.3.2

Una retta ed un piano sono detti *retta e piano incidenti* o *secanti* se la retta non appartiene al piano ed ha con esso un punto in comune.

Proseguendo la nostra costruzione, notiamo infine che, siccome il punto T non appartiene al piano σ, detto punto non può essere allineato con i punti P ed R altrimenti, dovendo esso appartenere in tal caso alla retta *r* passante per i punti P ed R del piano σ, per il Lemma 1.2.1, apparterrebbe anche al piano σ; contro quanto imposto per costruzione. Allora, per l'Assioma E2 primo comma, esiste in $\mathcal{E}^3$ un piano τ (figura 8) individuato dai punti non allineati P, R, e T, distinto dal piano σ, ma che con σ ha punti in comune: dunque in $\mathcal{E}^3$ esistono certamente coppie di piani distinti con intersezione non vuota. È ben posta, allora, anche la seguente:

Definizione 1.3.3

Due piani distinti aventi un punto in comune sono detti *piani incidenti* o *piani secanti*.

Alla luce di queste tre definizioni si ottengono facilmente le seguenti tre proprietà di incidenza, che di fatto introducono altrettante definizioni.

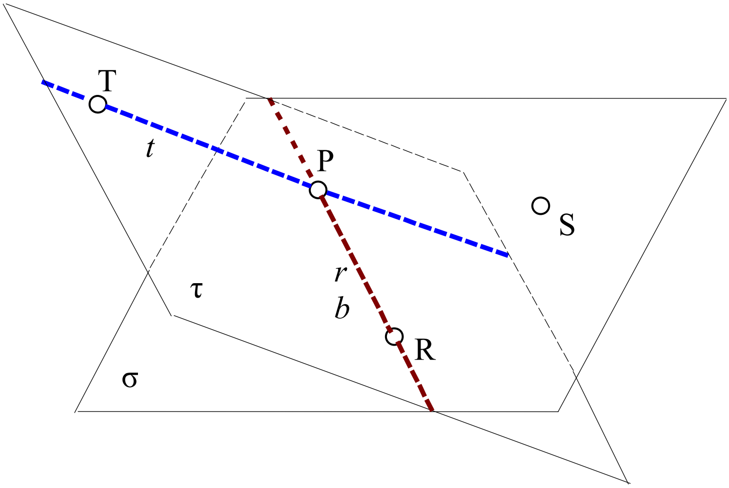


fig.8

Corollario 1.3.1

Due rette incidenti si intersecano in un solo punto, detto *punto di incidenza delle rette*.

DIMOSTRAZIONE

La tesi è conseguenza diretta della Definizione 1.3.1 e della Proposizione 1.2.1. ■

Corollario 1.3.2

Una retta e un piano incidenti si intersecano in un solo punto, detto *punto di incidenza della retta e del piano*.

DIMOSTRAZIONE

La tesi è conseguenza diretta della Definizione 1.3.2 e del Lemma 1.2.1. ■

Corollario 1.3.3

Due piani incidenti si intersecano in una sola retta, detta *retta di incidenza dei piani*.

DIMOSTRAZIONE

La tesi è conseguenza diretta della Definizione 1.3.3 e del Corollario 1.2.1. ■

Inoltre si ha:

Corollario 1.3.4

Per una retta passano almeno due piani incidenti.

DIMOSTRAZIONE

La tesi è conseguenza diretta della Definizione 1.3.3 e del Corollario 1.2.3. ▪

Ed ancora:

Corollario 1.3.5

Per due rette incidenti passa un solo piano.

DIMOSTRAZIONE

La tesi è conseguenza diretta della Definizione 1.3.1 e del Corollario 1.2.4. ▪

E reciprocamente:

Corollario 1.3.6

Un piano passa per almeno due rette incidenti.

DIMOSTRAZIONE

La tesi è conseguenza diretta della Definizione 1.3.1 e del Corollario 1.2.5. ▪

Torniamo, adesso, agli oggetti di $\mathcal{E}^3$ che abbiamo individuato finora; e cioè (con riferimento alla figura 9) il piano σ passante per i tre punti non allineati P, R ed S, ed un quarto punto T non appartenente a σ e quindi non complanare con i punti P, R ed S. Osserviamo che non esiste alcun piano passante per la retta *t*, individuata dai due punti distinti P e T, e contemporaneamente passante per la retta *u*, individuata dai due punti distinti R ed S. Infatti, se per assurdo un tale piano esistesse esso conterrebbe tutti e quattro i punti P, R, S e T in virtù della appartenenza ad esso di entrambe le rette, *t* ed *u*; in particolare i quattro punti P, R, S e T risulterebbero, invero, complanari.

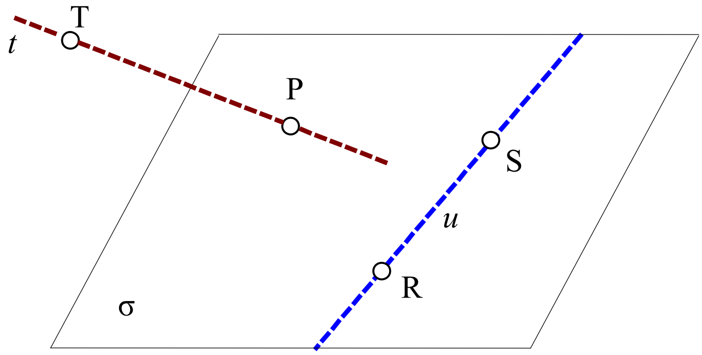


fig.9

In $\mathcal{E}^3$, dunque esistono certamente rette non complanari; è ben posta, dunque, anche la:

Definizione 1.3.4

Due rette non complanari sono dette *rette sghembe*.

Per le rette sghembe vale la:

Proposizione 1.3.1

Due rette sghembe non hanno alcun punto in comune.

DIMOSTRAZIONE

Due rette sghembe sono necessariamente distinte altrimenti, per l'Assioma E3 primo comma, esse sarebbero complanari, contro la Definizione 1.3.4. Adesso, la Proposizione 1.2.1 asserisce, in buona sostanza, che due rette distinte di $\mathcal{E}^3$ o non hanno alcun punto in comune oppure hanno un sol punto in comune; in questo secondo caso, a norma della Definizione 1.3.1, le rette risulterebbero incidenti e quindi, per il Corollario 1.3.5, esse sarebbero complanari; ancora contro la Definizione 1.3.4. Si può conclude, pertanto, che le rette sghembe non hanno alcun punto in comune. ∎

Osserviamo esplicitamente che, come sarà dimostrato tra poco, l'inverso della Proposizione 1.3.1 non vale: nel senso che non tutte le rette che non si intersecano sono rette sghembe.

1.4 Parallelismo tra rette – Le direzioni di $\mathcal{E}^3$.

Per l'Assioma E5, esistono in $\mathcal{E}^3$ rette complanari non aventi alcun punto in comune. Questo permette di dare la seguente fondamentale:

Definizione 1.4.1 (*)

> **Due rette si dicono *parallele* se coincidono, oppure sono complanari e non hanno alcun punto in comune. Nel caso di rette parallele e distinte diremo anche che esse sono *propriamente parallele*.**

Tenendo presente anche le definizioni di rette incidenti e di rette sghembe si ha la seguente legge di tricotomia espressa dal:

Teorema 1.4.1 (*)

> **Tra due rette qualsiasi di $\mathcal{E}^3$ sussiste una e una sola delle seguenti relazioni:**
>
> **1) le rette sono parallele**
> **2) le rette sono incidenti**
> **3) le rette sono sghembe**

DIMOSTRAZIONE

Facciamo vedere che se è vera la 1) allora sono false la 2) e la 3) e, viceversa, se sono false la 3) e la 2) allora è vera la 1).

Se due rette di $\mathcal{E}^3$ sono parallele allora, dalla definizione di rette parallele, esse o coincidono oppure non hanno alcun punto in comune, dunque esse non sono incidenti perché la definizione di rette incidenti ne imporrebbe la disuguaglianza e l'esistenza di un punto in comune. Ancora, se due rette di $\mathcal{E}^3$ sono parallele allora, dalla definizione di rette parallele, esse sono complanari, dunque le rette non sono sghembe perché la definizione di rette sghembe ne imporrebbe la non complanarità. Viceversa, se due rette di $\mathcal{E}^3$ non sono sghembe allora, dalla definizione di rette sghembe, esse sono complanari, e se non sono neanche incidenti allora, dalla la definizione di rette incidenti, esse o non sono distinte (cioè sono rette coincidenti e quindi ancora complanari) oppure non hanno alcun punto in comune (perché la Proposizione 1.2.1 afferma che due rette distinte hanno al più un punto in comune): due rette coincidenti, o complanari e non avente alcun punto in comune, sono per definizione parallele.

Facciamo vedere che se è vera la 2) allora sono false la 1) e la 3) e, viceversa, se sono false la 3) e la 1) allora è vera la 2).

Se due rette di $\mathcal{E}^3$ sono incidenti allora, per definizione di rette incidenti, esse sono distinte ed hanno un punto in comune, dunque esse non sono parallele perché la definizione di rette parallele ne imporrebbe o l'uguaglianza oppure il fatto di non avere alcun punto in comune. Ancora, se due rette di $\mathcal{E}^3$ sono incidenti allora, per il Corollario 1.3.5, esse sono complanari, dunque esse non sono sghembe perché la definizione di rette sghembe ne imporrebbe la non complanarità. Viceversa, se due rette non sono sghembe allora, dalla definizione di rette sghembe, esse sono complanari, e se non sono neanche parallele allora, dalla definizione di rette parallele, esse non sono coincidenti (cioè sono rette distinte) ed, essendo complanari, devono avere un punto in comune altrimenti sarebbero (propriamente) parallele: due rette distinte aventi un punto in comune sono per definizione incidenti.

Infine, facciamo vedere che se è vera la 3) allora sono false la 1) e la 2) e viceversa se sono false la 2) e la 1) allora è vera la 3). Ciò concluderà la nostra dimostrazione.

Se due rette di $\mathcal{E}^3$ sono sghembe allora, per definizione di rette sghembe, esse non sono complanari, dunque esse non sono parallele perché la definizione di rette parallele ne imporrebbe la complanarità. Ancora, se due rette di $\mathcal{E}^3$ sono sghembe allora, per la Proposizione 1.3.1, esse non hanno alcun punto in comune, dunque esse non sono incidenti perché la definizione di rette incidenti imporrebbe l'esistenza di un punto in comune. Viceversa, se due rette di $\mathcal{E}^3$ non sono incidenti allora, dalla definizione di rette incidenti, esse o non sono distinte (cioè sono coincidenti) oppure non hanno alcun un punto in comune (perché la Proposizione 1.2.1 afferma che due rette distinte hanno al più un punto in comune), e se non sono neanche parallele allora, dalla definizione di rette parallele, esse non sono coincidenti e, non avendo alcun punto in comune, non possono essere complanari altrimenti sarebbero (propriamente) parallele: due rette non complanari per definizione sono sghembe. ■

Con l'ausilio della definizione di parallelismo tra rette, l'Assioma E5 può essere semplificato come segue (che è la forma in cui questo assioma viene maggiormente utilizzato)

Proposizione 1.4.1 (*)

Per un punto passa una sola retta parallela ad una retta data.

DIMOSTRAZIONE

Sia P ed *r* rispettivamente un punto ed una retta di $\mathcal{E}^3$.

Dalla definizione di parallelismo segue che una retta è parallela a se stessa. Adesso se la retta *r* passa per il punto P questa è la retta cercata perché ogni altra retta, distinta da *r* e passante per P, è per definizione incidente con *r* e, per il teorema precedente, non può essere parallela ad *r*; dunque in questo caso *r* è l'unica retta parallela ad *r* e passante per P. Se, invece, la retta *r* non passa per il punto P, l'Assioma E5, alla luce della Definizione 1.4.1, garantisce l'esistenza e l'unicità della retta passante per P e (propriamente) parallela ad *r*. ■

Inoltre si ha:

Proposizione 1.4.2 (*)

Per due rette propriamente parallele passa un solo piano.

DIMOSTRAZIONE

Date due rette propriamente parallele (cioè parallele e distinte), *r* ed *s* di $\mathcal{E}^3$, per l'Assioma E5, esiste certamente il piano σ passante per esse (figura 10). Detto piano è unico. Infatti, per l'Assioma E1 secondo comma esistono sulla retta *s* due punti distinti, P ed S, come pure esiste sulla retta *r* almeno un altro punto R non allineato con P ed S perché per ipotesi le rette r ed *s* non hanno alcun punto in comune. Adesso, il piano σ, dovendo necessariamente passare per i tre punti non allineati P, R ed S, perché per ipotesi passa per le rette *r* ed *s*, in forza del primo comma dell'Assioma E2 è unico. ■

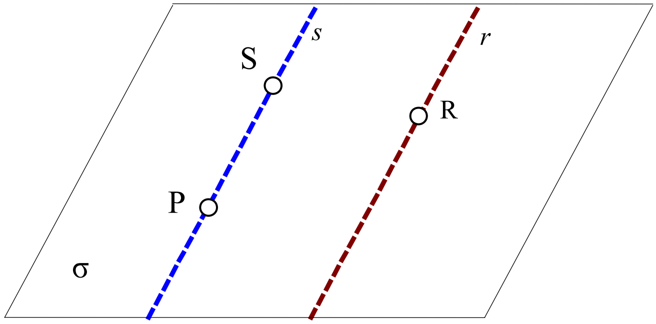


fig.10

Reciprocamente:

Proposizione 1.4.3 (*)

Un piano passa per almeno due rette propriamente parallele.

DIMOSTRAZIONE

Sia σ un piano (ci si può riferire ancora alla figura 10). L'Assioma E2 secondo comma afferma che il piano σ passa per tre punti non allineati (quindi distinti) P, R ed S. In forza dell'Assioma E1 primo comma, sia *s* la retta di $\mathcal{E}^3$ passante per i punti distinti P ed S, la quale, per la condizione di non allineamento dei punti P, R ed S, non passa per il punto R. In forza dell'Assioma E5, allora, sia *r* la retta passante per il punto R, non avente con la retta *s* alcun punto in comune e complanare con questa secondo un piano τ: dunque le rette *r* ed *s* sono rette propriamente parallele. Per il Lemma 1.2.1, si ha che le retta *s*, siccome passa per i punti distinti P ed S del piano σ, appartiene a σ. Dimostriamo che anche la retta *r* appartiene a σ. All'uopo, il piano τ, contenente entrambe le rette *r* ed *s*, contiene a fortiori i tre punti non allineati P, R ed S, i quali appartengono anche al piano σ; l'Assioma E2 primo comma garantisce che τ coincide con σ, in particolare la retta *r* appartiene al piano σ. ■

La proprietà che una retta *a* è parallela a se stessa si traduce dicendo che la

relazione di parallelismo tra rette è *riflessiva*: scrivendosi $a//a$. Essa risulta essere pure *simmetrica*, cioè si ha, come risulta evidente dalla definizione stessa di parallelismo tra rette, che se la retta a è parallela alla retta b allora la retta b è parallela alla retta a: scrivendosi se $a//b$ allora $b//a$.
Si può dimostrare, invero, che la relazione di parallelismo tra rette è anche *transitiva*, per mezzo del seguente:

Teorema 1.4.2 (*)

Se a, b e c sono tre rette di $\mathcal{E}^3$ **tali che $a//b$ e $b//c$ allora $a//c$.**

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo preliminarmente che occorre dimostrare il teorema nel caso in cui tali rette siano distinte perché in caso contrario la transitività della relazione di parallelismo tra rette consegue banalmente dalle due proprietà precedenti: riflessività e simmetria. Nel nostro caso, quindi, siccome le rette b e c sono per ipotesi propriamente parallele, siamo sicuri dell'esistenza di un punto C della retta c non appartenente alla retta b; tale punto C, infine, non appartiene neanche alla retta a, altrimenti per esso passerebbero due parallele distinte alla retta b (la rette a e c appunto) contro la Proposizione 1.4.1.

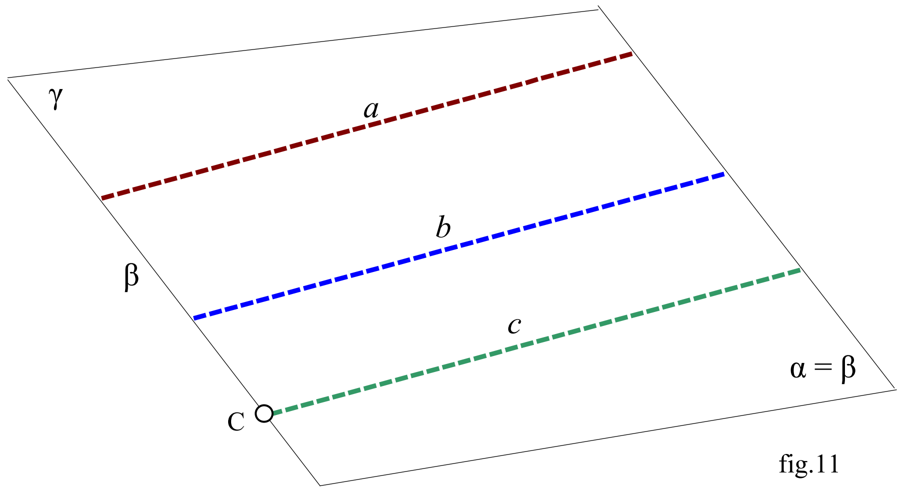


fig.11

Le due rette a e b, propriamente parallele per ipotesi, individuano così, per la Proposizione 1.4.2, un unico piano γ, come pure le due rette propriamente parallele b e c individuano un unico piano α; un terzo unico piano β è individuato, per la Proposizione 1.2.3, dalla retta a e dal punto C non appartenente ad a.

Se i piani α e β coincidono (figura 11), le tre rette a, b e c appartengono tutte al piano α e quindi per la Proposizione 1.4.1 risulta $a//c$: infatti se le rette a e c, distinte per ipotesi, avessero un punto in comune per questo passerebbero due rette distinte, la a e la c appunto, parallele per ipotesi alla retta b; contro la suddetta proposizione.

Se invece $\alpha \neq \beta$ (figura 12), per il Corollario 1.2.1 essi hanno in comune una retta d poiché il punto C (appartenente al piano β per costruzione ed al piano α in quanto elemento della retta c di α) appartiene ad entrambi i piani. Tale retta d, lo evidenziamo esplicitamente, passante per il punto C ed appartenente sia al piano α che al piano β, è distinta dalla retta b (perché il punto C, come detto, non appartiene a b). Dimostriamo che la retta d non ha alcun punto in comune con la retta b. All'uopo consideriamo, per assurdo, l'eventuale (unico) punto B che le rette distinte b e d avrebbero in comune; esso apparterrebbe tanto al piano β (perché la retta d appartiene a β) quanto al piano γ (perché la retta b appartiene a γ), ma ai medesimi piani, β e γ, appartiene anche la retta a la quale, essendo per ipotesi propriamente parallela alla retta b, non passa per il punto B; per la Proposizione 1.2.3 ne segue allora che il piano β coinciderebbe col piano γ, e di conseguenza, anche la retta b di γ apparterrebbe al piano β che pertanto, in forza del Corollario 1.3.5, risulterebbe coincidente col piano α perché entrambi individuati dalle due rette incidenti, b e d. Ciò contraddice l'ipotesi $\alpha \neq \beta$. Dunque le rette d e b, non avendo alcun punto in comune ed appartenendo entrambe al piano α, sono parallele, e, siccome la retta d passa per il punto C, la Proposizione 1.4.1 assicura che essa coincide con la retta c, quindi c appartiene al piano β. Le rette, a e c, distinte per ipotesi, sono allora complanari perché entrambe appartenenti al piano β. Dimostriamo ora che la retta c non ha alcun punto in comune con la retta a. All'uopo ricordiamo che la retta c appartiene al piano α, mentre la retta a appartiene al piano γ, quindi l'eventuale (unico) punto

A in comune di *c* e *a* apparterrebbe tanto al piano α quanto al piano γ i quali risultano piani distinti, sennò la retta *a* apparterrebbe al piano α e di nuovo, per la Proposizione 1.4.2, si contraddirebbe l'ipotesi $\alpha \neq \beta$ dato

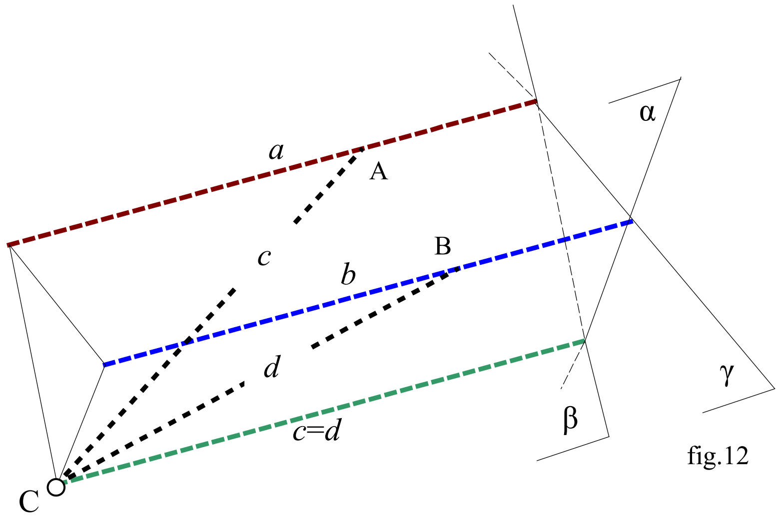


fig.12

che entrambi i piani conterrebbero le due rette *a* e *b* propriamente parallele. Per la Proposizione 1.2.2, allora, l'eventuale punto A apparterrebbe alla retta *b* comune ai piani α e γ; in definitiva la retta *a* e la retta *b* avrebbero il punto A in comune, contro l'ipotesi che sono propriamente parallele.

In conclusione, la retta *a* e la retta *c*, non avendo alcun punto in comune ed appartenendo entrambe al piano β, sono propriamente parallele; in simboli *a*//*c*, ed il teorema è completamente dimostrato. ■

La simmetria e la transitività dimostrano facilmente la validità, senza eccezioni, anche del seguente corollario, il quale traduce la proprietà delle rette parallele maggiormente utilizzata:

Corollario 1.4.1 (*)

Due rette parallele ad una terza retta data sono parallele tra loro.

DIMOSTRAZIONE

Da *a*//*c* e *b*//*c* dobbiamo dimostrare che *a*//*b*.

Per la proprietà di simmetria della relazione di parallelismo tra rette, dall'ipotesi $b//c$ si ha $c//b$ che insieme all'ipotesi $a//c$, applicando il Teorema 1.4.2, fornisce $a//b$. ■

Una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva definita in un insieme è una *relazione di equivalenza*. Questo permette di introdurre un nuova nozione caratteristica dello Spazio Affine Euclideo: cioè il concetto di direzione, alla cui definizione possiamo pervenire nel modo seguente.

Insieme con una retta qualunque di $\mathcal{E}^3$ consideriamo ogni retta parallela ad essa, si ottiene così un insieme non vuoto di rette chiamato *classe di rette parallele*. Per la Proposizione 1.4.1 si ha che per ogni punto di $\mathcal{E}^3$ passa una retta ben determinata della classe. Supponiamo ora di aver operato in questo modo per ogni retta di $\mathcal{E}^3$, ottenendo così per ogni retta una classe di rette parallele; in termini più rigorosi: consideriamo l'*insieme quoziente* (9) relativo alla relazione di parallelismo tra rette di $\mathcal{E}^3$. Osserviamo subito che due classi distinte $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di rette parallele non hanno alcuna retta in comune: se infatti, per assurdo, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ avessero in comune una retta r, per il Corollario 1.4.1 una retta qualsiasi di $\mathcal{A}$ ed una retta qualsiasi di $\mathcal{B}$ sarebbero parallele tra di loro e dunque le classi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ coinciderebbero. Per questo, due classi distinte sono disgiunte. Ogni retta di $\mathcal{E}^3$ appartiene quindi ad una sola classe e, siccome per un punto passa almeno una retta, tutto lo spazio $\mathcal{E}^3$ risulta suddiviso in rette propriamente parallele (partizionamento di $\mathcal{E}^3$ secondo rette parallele), mentre tutte le rette di $\mathcal{E}^3$ risultano suddivise in classi disgiunte di rette parallele. Allora è ben posta la seguente:

Definizione 1.4.2 (*)

Dicesi *direzione* dello Spazio Affine Euclideo $\mathcal{E}^3$ una classe di rette parallele.

Pertanto, invece di dire che una retta r appartiene ad una ben determinata classe $\mathcal{D}$ di rette parallele possiamo dire semplicemente che «*la retta r appartiene alla direzione* $\mathcal{D}$» oppure «*la retta r passa per la direzione* $\mathcal{D}$» o preferibilmente «$\mathcal{D}$ *è la direzione della retta r*».

Così, per esempio, la Proposizione 1.4.1 può essere riformulata come segue:

Corollario 1.4.2 (*)

Per un punto passa una sola retta avente una data direzione.

NOTE

(9) – Per la nozione di relazione di equivalenza e di insieme quoziente si veda il complemento 1A.

1.5 Parallelismo tra piani – Le giaciture di $\mathcal{E}^3$.

Abbiamo in precedenza dimostrato che in $\mathcal{E}^3$ esiste almeno un coppia di rette incidenti, quindi distinte (figura 13): la retta *a* passante per i punti distinti S ed A, e la retta *b* passante per i punti distinti S e B (ed i punti S, A e B non sono ovviamente allineati). Per il Corollario 1.3.5, allora, in $\mathcal{E}^3$ deve esistere anche il piano σ passante per le rette *a* e *b*, e per l'Assioma E4,

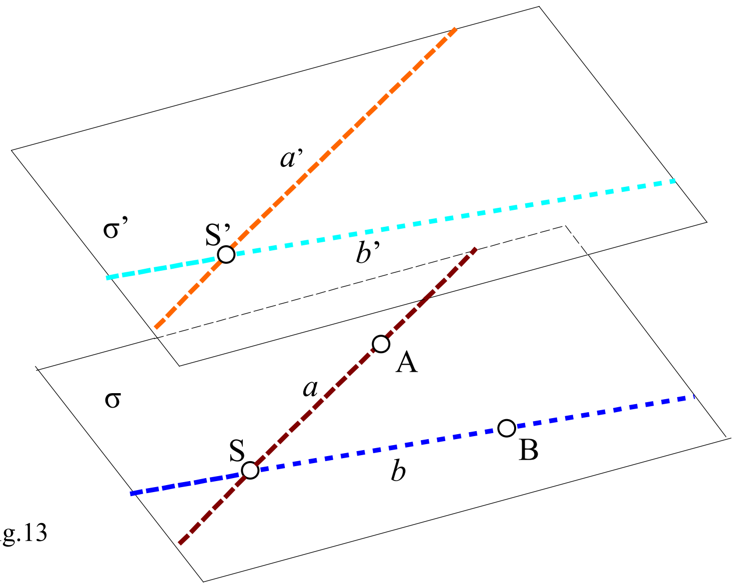


fig.13

in $\mathcal{E}^3$ esiste almeno un altro punto S' non appartenente al suddetto piano σ (e quindi in particolare non appartenente né alla retta *a* né alla retta *b*). L'Assioma E5, infine, garantisce l'esistenza in $\mathcal{E}^3$ di due rette distinte *a*' e *b*' passanti entrambe per S' e non aventi alcun punto in comune rispettivamente con le rette *a* e *b*; dunque le rette *a*' e *b*' sono incidenti in S' e sono propriamente parallele rispettivamente alle rette *a* e *b*. Detto σ' il piano, la cui esistenza (ed unicità) è assicurata dal Corollario 1.3.5, passante per le rette *a*' e *b*', è certamente σ' distinto da σ perché, per esempio, il punto S' appartiene a σ' ma non a σ. Risulta, allora, che i piani σ' e σ non hanno alcun punto in comune. Per dimostrare quest'ultima affermazione facciamo vedere che se i piani σ e σ' avesse un punto in comune allora σ' coinciderebbe con σ.

Dall'ipotesi, assurda, che i piani σ e σ' hanno un punto in comune, per l'Assioma E3 secondo comma, segue che essi hanno in comune una retta *r* (figura 14); detta retta *r* non passando per il punto S', perché S' non appartiene al piano σ, è distinta sia dalla retta *a*' che dalla retta *b*' pur essendo complanare con esse secondo il piano σ'. Non può essere contemporaneamente *a*'//*r* e *b*'//*r* altrimenti per il Corollario 1.4.1 sarebbe anche *a*'//*b*', contro il fatto che *a*' e *b*' sono rette incidenti. Supponiamo dunque, senza perdita di generalità, pena lo scambio dei simboli *a*' e *b*', che la retta *r* non sia parallela alla retta *a*'; allora il Teorema 1.4.1 garantisce che le rette complanari (quindi non sghembe) *r* ed *a*' sono incidenti in un punto R'. Inoltre la retta *r* non è parallela neanche alla retta *a* altrimenti dal parallelismo tra *a* ed *a*' seguirebbe per transitività quello tra *r* ed *a*', allora sempre il Teorema 1.4.1 garantisce anche l'incidenza delle rette *r* ed *a* in un punto R il quale, per il parallelismo delle rette distinte *a* ed *a*', risulta distinto da R'. Indicato con τ il piano contenente la retta *a*' ed il punto R non appartenente ad *a*', la cui esistenza ed unicità sono garantite dalla Proposizione 1.2.3, osserviamo che esso dovendo contenere anche il punto R' distinto da R, per il Lemma 1.2.1, contiene la retta *r*. Detta, infine, *t* la retta del piano τ, passante per R e parallela alla retta *a*', la cui esistenza ed unicità sono garantite dall'Assioma E5 in quanto R non appartiene ad *a*', si ha che *t* coincide con *a* sennò per il punto R esisterebbero due parallele distinte alla retta *a*',

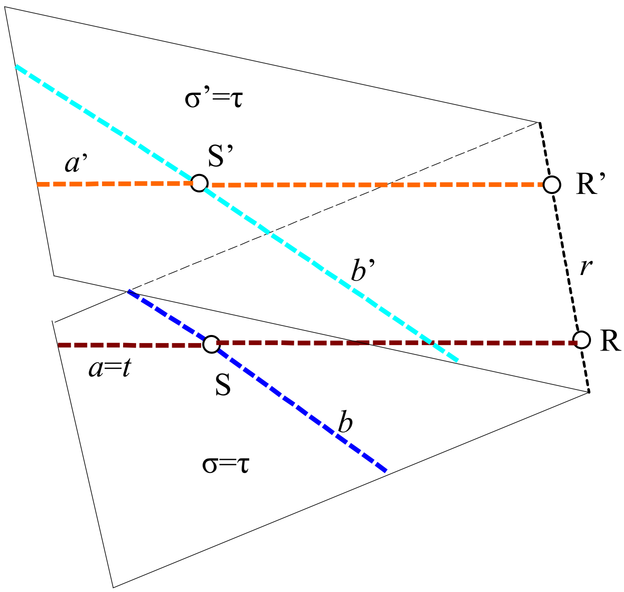


fig.14

contro la Proposizione 1.4.1; dunque anche la retta *a* appartiene al piano τ. Reciprocamente, il piano τ avendo in comune con il piano σ' le due rette incidenti *a*' ed *r*, per il Corollario 1.3.5, coincide con σ', ed inoltre avendo in comune con il piano σ le due rette incidenti *a* ed *r*, per il medesimo corollario, τ coincide anche con σ. Allora il piano σ coincide con piano σ', contro il fatto che σ è distinto da σ'.

Quanto testé osservato permette di concludere che in $\mathcal{E}^3$ esistono piani non aventi alcun punto in comune. Ciò giustifica la seguente:

Definizione 1.5.1 (*)

> **Due piani sono detti *piani paralleli* se coincidono oppure non hanno alcun punto in comune. Nel caso di piani paralleli e distinti diremo anche che essi sono *propriamente paralleli*.**

Tenendo presente anche la Definizione 1.3.3 di piani incidenti si ha:

Teorema 1.5.1 (*)

> **Tra due piani qualsiasi sussiste una ed una sola delle seguenti relazioni [(10)]:**

1) i piani sono paralleli
2) i piani sono incidenti

DIMOSTRAZIONE

Facciamo vedere che se è vera la 1) allora è falsa la 2) e, viceversa, se è falsa la 2) allora è vera la 1).

Se due piani sono paralleli allora, dalla Definizione 1.5.1, essi o coincidono o sono disgiunti, dunque essi non sono incidenti perché la definizione di piani incidenti richiede che essi siano distinti e non disgiunti. Viceversa, se due piani non sono incidenti allora, dalla Definizione 1.3.3, essi o non sono distinti (cioè coincidono) oppure, se distinti, sono disgiunti perché la definizione di piani incidenti ne imporrebbe la distinzione e l'intersezione non vuota: due piani coincidenti, o distinti e disgiunti, sono per definizione paralleli.

Facciamo vedere che se è vera la 2) allora è falsa la 1) e, viceversa, se è falsa la 1) allora è vera la 2).

Se due piani sono incidenti allora, dalla Definizione 1.3.3, essi sono distinti e non disgiunti, quindi non sono paralleli perché la definizione di piani paralleli ne imporrebbe o la coincidenza o la disgiunzione. Viceversa, se due piani non sono paralleli allora, dalla Definizione 1.5.1, essi non sono coincidenti (cioè sono distinti) e non sono disgiunti perché la definizione di pani paralleli ne imporrebbe o la coincidenza oppure, se distinti, la disgiunzione: due piani distinti e non disgiunti sono per definizione incidenti. ■

Vale la seguente notevole:

Proposizione 1.5.1 (*)

Un piano interseca due piani paralleli secondo rette di intersezione parallele tra di loro.

DIMOSTRAZIONE

Siano α e β due piani paralleli e γ un terzo piano incidente con entrambi i piani α e β.

Se α coincide con β si ha un'unica retta di intersezione e la proposizione, in tal caso, è banalmente dimostrata.

Sia allora α diverso da β e quindi, dalla Definizione 1.5.1, α disgiunto da β, e siano *a* e *b* le rette di intersezione, necessariamente distinte

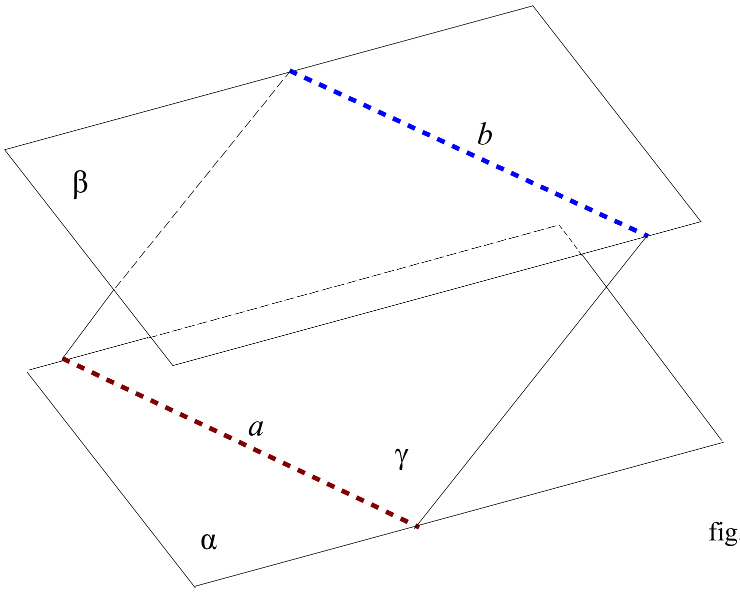


fig.15

perché appartenenti a piani disgiunti, rispettivamente di α con γ e di β con γ (figura 15). Si ha in primo luogo che le rette *a* e *b*, dovendo entrambe appartenere al piano γ, non sono sghembe; inoltre esse non sono neanche incidenti altrimenti il loro punto di incidenza apparterrebbe tanto al piano α quanto al piano β, contro il fatto che α e β sono disgiunti. Il Teorema 1.4.1 garantisce, pertanto, il parallelismo tra le rette *a* e *b*. ■

Notiamo esplicitamente che l'inverso della Proposizione 1.5.1 non è valido: nel senso che non tutti i piani che sono intersecati da un terzo piano secondo rette parallele sono piani paralleli; come dimostra il contro esempio rappresentato in figura 16 ove, in forza dalla Proposizione 1.4.2, si è considerato il piano γ passante per le rette propriamente parallele *a* e *b* rispettivamente dei piani α e β incidenti secondo la retta *r*.

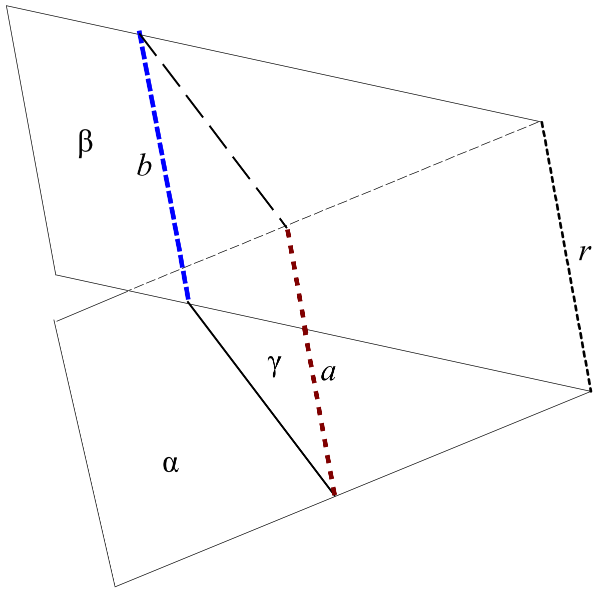


fig.16

Si ha, inoltre, l'importante:

Teorema 1.5.2 (*)

Per un punto passa uno solo piano parallelo ad un piano dato.

DIMOSTRAZIONE

Siano P ed α rispettivamente un punto ed un piano di $\mathcal{E}^3$. Si noti che il punto P può appartenere come non appartenere al piano α, pertanto dimostriamo il teorema considerando separatamente entrambe le eventualità.

Nel primo caso, siccome dalla Definizione 1.5.1 segue che un piano è parallelo a se stesso, si ha che α è un piano parallelo ad α e passante per P; facciamo vedere quindi che esso è anche unico.
Sia, per assurdo, β un piano parallelo al piano α e, come α, passante per il punto P; allora β non è disgiunto da α e, per la Definizione 1.5.1, si ha che β deve coincide con α.

Passiamo al secondo caso (figura 17), supponendo cioè che il punto P non appartenga al piano α. In forza della Proposizione 1.4.1, consideriamo per il punto P le parallele *a*' e *b*' rispettivamente alle rette incidenti *a* e *b* del piano α nel punto Q; l'esistenza di questi oggetti del piano *a*,

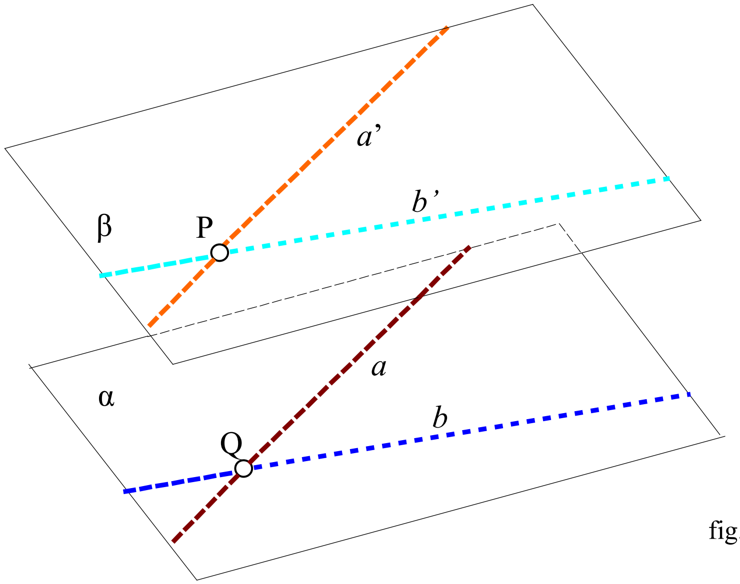


fig.17

cioè le rette incidenti *a* e *b* ed il loro punto di intersezione Q è comprovata dalle considerazioni svolte all'inizio del paragrafo.
Le stesse considerazioni assicurano che il piano β individuato dalle due rette incidenti *a*' e *b*' è propriamente parallelo al piano α; facciamo vedere quindi che esso è anche unico.

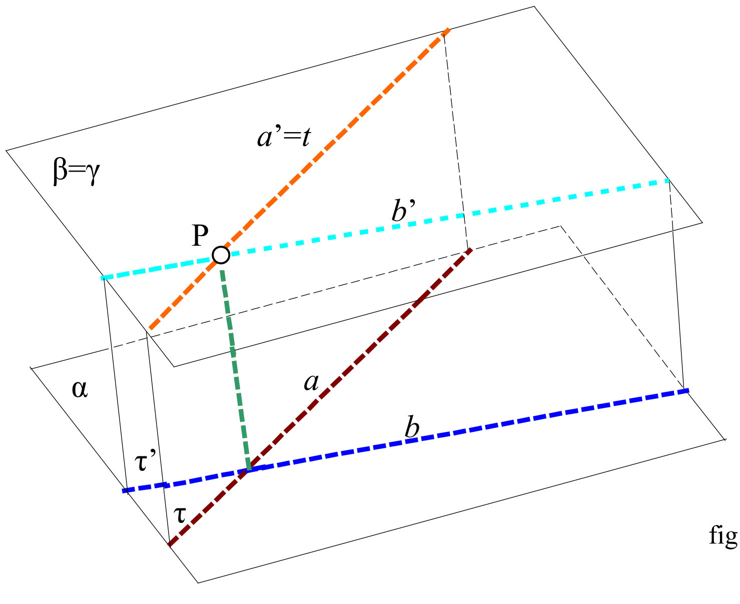


fig.18

Sia, per assurdo, γ un piano distinto da β, passante per il punto P e parallelo al piano α. Il piano τ (figura 18), la cui esistenza ed unicità sono garantite dalla Proposizione 1.4.2, individuato dalle rette propriamente parallele *a* ed *a*', contenendo il punto P del piano γ, è incidente con γ oltre che con il piano α, ma α e γ sono per ipotesi paralleli e dunque, per la Proposizione 1.5.1, τ avrà in comune con γ una retta *t* parallela alla retta *a*; inoltre la retta *t* passerà per il punto P. Per l'unicità, sancita dalla Proposizione 1.4.1, della parallela ad *a* passante per P si ha che la retta *t* coincide con la retta *a*'. Analogamente il piano τ' individuato dalle rette propriamente parallele *b* e *b*' deve avere in comune con il piano γ la retta *b*'. Il piano γ, infine, avendo in comune con il piano β le rette incidenti *a*' e *b*', per il Corollario 1.3.5, coincide con β. ■

La proprietà che un piano α è parallelo a se stesso si traduce dicendo che la relazione di parallelismo tra piani è *riflessiva*: scrivendosi α//α. Essa risulta essere pure *simmetrica*, cioè si ha, come risulta evidente dalla definizione stessa di parallelismo tra piani, che se il piano α è parallelo al piano β allora il piano β è parallelo al piano α: scrivendosi se α//β allora β//α.
Si può dimostrare, invero, che la relazione di parallelismo tra piani è anche *transitiva*, per mezzo del seguente:

Teorema 1.5.3 (*)

Se α, β e γ sono tre piani tali che α//β e β//γ allora α//γ.

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo preliminarmente che occorre dimostrare il teorema nel caso in cui tali piani siano distinti perché in caso contrario la transitività consegue dalle due proprietà precedenti: riflessività e simmetria.

Supponiamo perciò i tre piani distinti: in tal caso α e γ non possono avere alcun punto in comune altrimenti per esso passerebbero due piani distinti paralleli al piano β, contro il Teorema 1.5.2; quindi i piani α e γ non sono incidenti, ed il Teorema 1.5.1 assicura che essi sono paralleli. ■

La riflessività, la simmetria e la transitività dimostrano, in modo formalmente identico a quanto visto in occasione del Corollario 1.4.1, la validità senza eccezioni dell'analogo:

Corollario 1.5.1 (*)

Due piani paralleli ad un terzo piano dato sono paralleli tra di loro.

Anche la relazione di parallelismo tra piani, al pari della relazione di parallelismo tra rette, è una *relazione di equivalenza*, per cui, analogamente al caso delle rette, è possibile introdurre un nuovo concetto pure caratteristico dello Spazio Affine Euclideo e precisamente quello di giacitura.

A questo scopo insieme con un piano qualunque consideriamo ogni piano parallelo ad esso: si ottiene così un insieme non vuoto di piani chiamato *classe di piani paralleli*. Per il Teorema 1.5.2, si ha che per ogni punto di $\mathcal{E}^3$ passa un piano ben determinato della classe. Supponiamo ora di aver operato in questo modo per ogni piano di $\mathcal{E}^3$ ottenendo così per ogni piano una classe di piani paralleli; in altri termini: consideriamo l'*insieme quoziente* (9) relativo alla relazione di parallelismo tra piani. Anche in questo caso due classi distinte $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di piani paralleli sono disgiunte, cioè non hanno alcun piano in comune: se infatti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ avessero in comune un piano γ, per il Corollario 1.5.1, un piano qualsiasi di $\mathcal{A}$ ed un piano qualsiasi di $\mathcal{B}$ sarebbero paralleli tra di loro e dunque le classi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ coinciderebbero. Per questo, due classi distinte sono dette disgiunte. Ogni piano di $\mathcal{E}^3$ appartiene allora ad una sola classe e quindi, siccome per un punto passa almeno un piano, tutto lo spazio $\mathcal{E}^3$ risulta suddiviso in piani propriamente paralleli (partizionamento di $\mathcal{E}^3$ secondo piani paralleli), mentre l'insieme dei piani di $\mathcal{E}^3$ risulta suddiviso in classi disgiunte di piani paralleli. Allora è ben posta la seguente:

Definizione 1.5.2 (*)

Dicesi *giacitura* dello Spazio Affine Euclideo $\mathcal{E}^3$ una classe di piani paralleli.

Pertanto invece di dire che il piano γ appartiene a una ben determinata classe $\mathcal{G}$ di piani paralleli, possiamo dire semplicemente «*il piano* γ *appartiene alla giacitura* $\mathcal{G}$» oppure «*il piano* γ *passa per la giacitura* $\mathcal{G}$» o preferibilmente «$\mathcal{G}$ *è la giacitura del piano* γ».

Per esempio, il Teorema 1.5.2 può essere così riformulato:

Corollario 1.5.2 (*)

Per un punto passa un solo piano avente una data giacitura.

N O T E

(10) – Da notare che, in $\mathcal{E}^3$, parlando di relazioni tra due piani non esiste il terzo caso, di piani non paralleli e contemporaneamente non incidenti, come avviene invece per le rette (sghembe).

1.6 Direzioni e giaciture - Parallelismo tra retta e piano

Dalla relazione di appartenenza tra retta e piano è possibile dedurre una relazione di appartenenza tra direzione e giacitura di $\mathcal{E}^3$. A questo scopo, dimostriamo il:

Lemma 1.6.1 (*)

Per un punto P di $\mathcal{E}^3$ passa una sola retta *d* di una data direzione $\mathcal{D}$ ed un sol piano γ di una data giacitura $\mathcal{G}$. Per ogni altro punto P' di $\mathcal{E}^3$ passa una sola retta *d'* di direzione $\mathcal{D}$ ed un solo piano γ' di giacitura $\mathcal{G}$, inoltre, se la retta *d* appartiene al piano γ allora la retta *d'* appartiene al piano γ'.

DIMOSTRAZIONE

Fissiamo una direzione $\mathcal{D}$ e una giacitura $\mathcal{G}$ di $\mathcal{E}^3$ (si fa notare che in $\mathcal{E}^3$ almeno una direzione e una giacitura esistono perché almeno una retta ed un piano in $\mathcal{E}^3$ esistono) e scegliamo a piacere un punto P in $\mathcal{E}^3$. Consideriamo, altresì, la retta *d* passante per il punto P e di direzione $\mathcal{D}$, ed il piano γ passante anch'esso per P e di giacitura $\mathcal{G}$. I Corollari 1.4.1 e 1.5.2 garantiscono l'esistenza e l'unicità della coppia retta-piano (*d*, γ); e la prima parte del lemma è dimostrata.

Consideriamo ora un altro punto P' di $\mathcal{E}^3$, al limite coincidente con P, e per esso un'altra coppia costituita dalla retta *d*' della stessa direzione $\mathcal{D}$ di *d* e dal piano γ' della stessa giacitura $\mathcal{G}$ di γ; per la Proposizione 1.4.1 ed il Teorema 1.5.2, anche la coppia retta-piano (d', γ') esiste ed è unica avendosi, per le definizioni di direzione e giacitura di $\mathcal{E}^3$, che la retta *d*' è la parallela passante per P' alla retta *d* e il piano γ' è il piano parallelo passante per P' al piano γ; e ciò dimostra anche la seconda parte.

Per dimostrare la terza ed ultima parte del lemma notiamo preliminarmente che il punto P', appartenente alla retta *d*' ed al piano γ', in relazione alla retta *d*, al piano γ ed al loro punto in comune P, presenta una ed una sola delle seguenti quattro configurazioni:

I) P' coincide con P, e dunque appartiene tanto a *d* quanto a γ
II) P' è diverso da P e appartiene sia a *d* che a γ
III) P' è diverso da P e non appartiene a *d* ma appartiene a γ
IV) P' è diverso da P e non appartenente tanto a *d* quanto a γ

Nel primo caso (figura 19) la tesi è immediata perché la retta *d*', per il Corollario 1.4.2, coincide con *d* ed il piano γ', per il Corollario 1.5.2 coincide con γ; dunque *d*' appartiene a γ'.

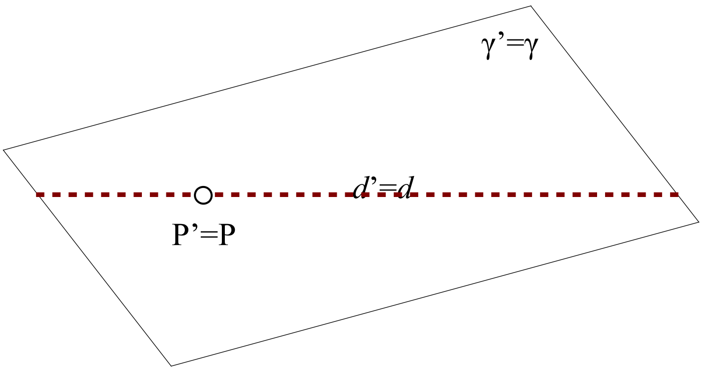


fig.19

Il secondo caso (figura 20) è altrettanto immediato; infatti per il Corollario 1.5.2, siccome per ipotesi il punto P' appartiene sia al piano γ che a γ', si ha ancora γ=γ', inoltre la retta *d*' coincide con *d*, perché se così non fosse, siccome per ipotesi *d* passa anche per P', avremmo l'assurdo che per il punto P' passerebbero due rette distinte, *d* e *d*' appunto, avente la stessa direzione, contro il Corollario 1.4.2; quindi *d*' appartiene a γ' anche questa volta.

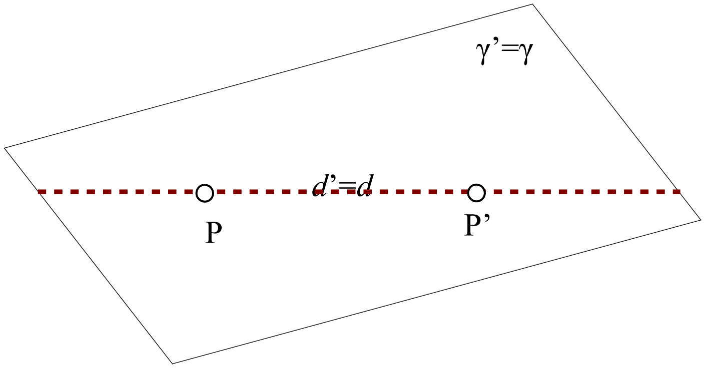


fig.20

Anche nel terzo caso (figura 20 bis), l'appartenenza del punto P' ai due piani paralleli per ipotesi, γ e γ', implica, per il Corollario 1.5.2, la coincidenza di questi ultimi e quindi l'appartenenza al piano γ' della retta *d* di γ. Questa volta, però, per ipotesi il punto P' non appartiene alla retta *d* dunque, la retta *d*' è propriamente parallela a *d*; risulta, tuttavia, che la retta *d*' appartiene al piano γ'. Infatti se così non fosse esisterebbe, in forza della Proposizione 1.4.2, un piano τ, diverso da γ', contenente le due rette propriamente parallele *d* e *d*' e quindi contenente, a fortori, la

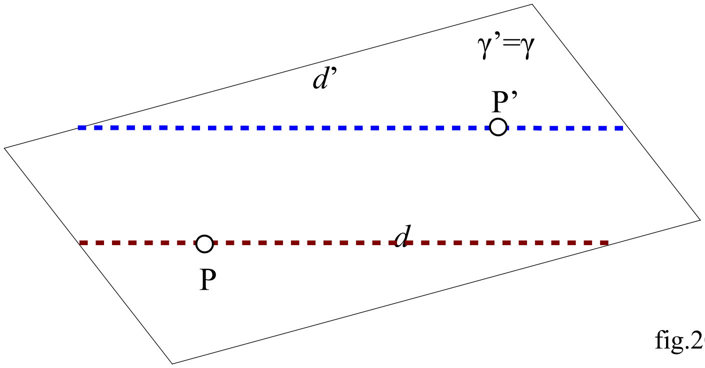


fig.20 bis

retta *d* ed il punto P’; ma gli stessi elementi, cioè la retta *d* ed il punto P’ fuori di essa, sono contenuti per ipotesi anche dal piano γ, per cui, in forza della Proposizione 1.2.3, si ottiene che il piano τ coincide con γ, e da $\gamma=\gamma'$ seguirebbe l’assurdo $\tau=\gamma$.

Nel quarto ed ultimo caso (figura 21), notiamo preliminarmente che il piano γ, parallelo per ipotesi a γ', è distinto da γ' perché quest’ulti mo contiene il punto P’ non appartenente al primo; ovvero i piani γ e γ' sono propriamente paralleli e, dunque, il punto P, e la retta *d*, non appartengono al piano γ'. Per dimostrare la tesi del lemma, procediamo ancora una volta per assurdo. Sotto le ipotesi di validità del lemma, supponiamo quindi che la retta *d’* non appartiene al piano γ'. Detto τ il piano, la cui esistenza ed unicità sono garantite dalla Proposizione 1.2.3, passante per la retta *d* di γ ed il punto P’ di γ', esso interseca i due piani propriamente paralleli γ e γ'. Infatti, il piano τ è incidente col piano γ perché con questo ha dei punti in comune, altro non fossero che quelli della retta *d*, ma è distinto da questo perché contiene il punto P’ il quale per ipotesi non appartiene a γ; inoltre il piano τ è incidente anche col piano γ' perché con questo ha almeno il punto P’ in comune, ma è distinto da questo in quanto contiene la retta d la quale nel nostro caso non appartiene al

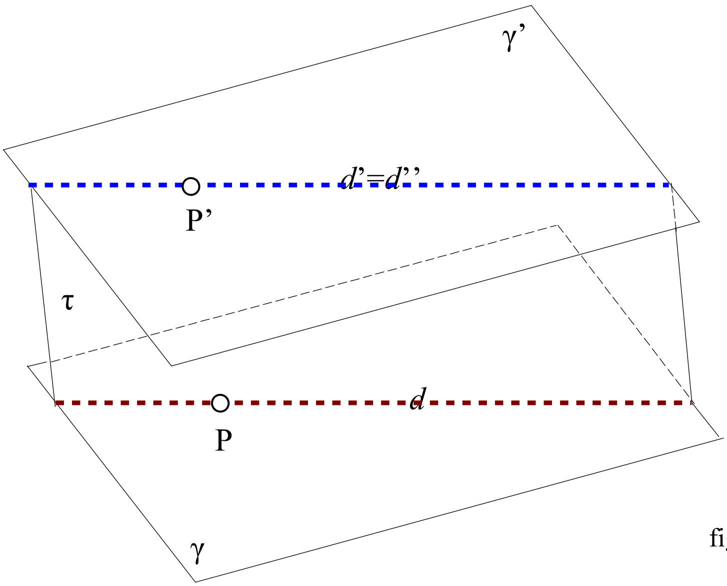


fig.21

piano γ'. Per la Proposizione 1.5.1, allora, il piano τ interseca il piano γ' secondo una retta *d''* parallela alla retta di intersezione col piano γ che per costruzione è proprio la retta *d*; orbene, per la Proposizione 1.4.1, la retta *d''* non può essere distinta dalla retta *d'*, ne segue che la retta *d'* appartiene al piano γ', contro la nostra ipotesi iniziale. Dunque anche in quest'ultimo caso possiamo dire che se la retta *d* appartiene al piano γ allora la retta *d'* appartiene al piano γ'. ∎

Tenendo presente che una retta di $\mathcal{E}^3$ appartiene (sempre) a qualche piano (Assioma E3 primo comma) e ricordando le Definizioni 1.4.2 e 1.5.2, il Lemma 1.6.1 permette di affermare che per ogni retta *d* di direzione arbitraria $\mathcal{D}$ esistono giaciture $\mathcal{G}$ tali che *d* appartiene ad un (solo) piano γ di giacitura $\mathcal{G}$. Allora risulta ben posta la:

Definizione 1.6.1 (*)

Una direzione $\mathcal{D}$ *appartiene ad una giacitura* $\mathcal{G}$ se esiste una retta di $\mathcal{D}$ appartenente ad un piano di $\mathcal{G}$.

Quando una direzione $\mathcal{D}$ appartiene ad una giacitura $\mathcal{G}$ diremo anche che «*la giacitura $\mathcal{G}$ passa per la direzione $\mathcal{D}$*»[11].

I Corollario 1.3.3, per il Lemma 1.6.1 ed alla luce della Definizione 1.6.1, diventa:

Corollario 1.6.1 (*)

Due giaciture distinte passano per una sola direzione.

mentre dal Corollario 1.3.4 si trae:

Corollario 1.6.2 (*)

Per una direzione passano almeno due giaciture distinte.

e ancora, il Corollario 1.3.5 diventa:

Corollario 1.6.3 (*)

Per due direzioni distinte passa una sola giacitura.

mentre dal Corollario 1.3.6 si trae:

Corollario 1.6.4 (*)

Una giacitura passa per almeno due direzioni distinte.

Sempre dal Lemma 1.6.1 e per la Definizione 1.6.1, segue che, data una direzione $\mathcal{D}$ e una giacitura $\mathcal{G}$ cui la direzione appartiene, ogni retta distinta di $\mathcal{D}$ appartiene ad un ben determinato piano di $\mathcal{G}$ e non ha alcun punto in comune con i rimanenti piani di $\mathcal{G}$. Si intravede dunque una relazione esistente tra le rette di $\mathcal{D}$ e i piani di $\mathcal{G}$, posto che $\mathcal{D}$ appartenga a $\mathcal{G}$; ciò è quello che precisiamo con la seguente ulteriore:

Definizione 1.6.2 (*)

Una retta *d* ed un piano γ $\mathcal{E}^3$ sono detti *retta e piano paralleli* se la direzione $\mathcal{D}$ della retta *d* appartiene alla giacitura $\mathcal{G}$ del piano γ. Nel caso di retta e piano paralleli e non appartenentesi diremo anche che la retta ed il piano *sono propriamente paralleli*.

Le osservazioni svolte, tenendo presente la Definizione 1.6.2, permettono allora di dire:

Corollario 1.6.5 (*)

Una retta è parallela ad un piano se e solo se la retta appartiene al piano oppure non ha alcun punto in comune con esso.

Quindi, ricordando anche la Definizione 1.3.2, si ha:

Teorema 1.6.1 (*)

Tra una retta ed un piano qualsiasi di $\mathcal{E}^3$ sussiste una e una sola delle seguenti due relazioni (12)**:**

1) la retta ed il piano sono paralleli
2) la retta ed il piano sono incidenti.

DIMOSTRAZIONE

Facciamo vedere che se è vera la 1) allora è falsa la 2) e, viceversa, se è falsa la 2) allora è vera la 1).

Se una retta ed un piano sono paralleli allora dal Corollario 1.6.4 segue che o la retta appartiene al piano o è disgiunta da esso; in ambo i casi la retta ed il piano non sono incidenti perché la Definizione 1.3.2 richiede che la retta non appartenga al piano e non sia da esso disgiunta. Viceversa se una retta ed un piano non sono incidenti allora dalla Definizione 1.3.2 segue che o la retta appartiene al piano oppure è disgiunta da esso; dunque, per i Corollario 1.6.4, la retta ed il piano sono paralleli.

Facciamo vedere che se è vera la 2) allora è falsa la 1) e, viceversa, se è falsa la 1) allora è vera la 2).

Se una retta ed un piano sono incidenti allora dalla Definizione 1.3.2 segue che la retta non appartiene al piano e non è da esso disgiunta; dunque la retta ed il piano non sono paralleli altrimenti il Corollario 1.6.4 imporrebbe o l'appartenenza della retta al piano oppure la loro disgiunzione. Viceversa, se una retta ed un piano non sono paralleli allora dal Corollario 1.6.4 segue che la retta non appartiene al piano e non è disgiunta da esso; dunque, per la Definizione 1.3.2, la retta ed il piano sono incidenti. ■

Nel prosieguo, in caso di parallelismo tra retta e piano, in luogo della locuzione: «*la retta ed il piano sono paralleli*» diremo anche, indifferentemente: «*la retta è parallela al piano*» oppure «*il piano è parallelo alla retta*».

Le seguenti tre proposizioni conclusive completano il quadro delle relazioni esistenti tra rette e piani.

Proposizione 1.6.1 (*)

Se una retta *r* è parallela ad un piano α ed il piano α è parallelo ad una piano β allora la retta *r* è parallela al piano β.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{D}$ la direzione della retta *r* e $\mathcal{G}$ la giacitura del piano α. L'ipotesi *r*//α, per la Definizione 1.6.2, significa che $\mathcal{D}$ appartiene a $\mathcal{G}$, mentre l'ipotesi α//β, per la Definizione 1.5.2, significa che i piani α e β hanno la stessa giacitura $\mathcal{G}$; ma allora la direzione della retta *r* appartiene anche alla giacitura del piano β ed in forza della Definizione 1.6.2 la retta *r* è parallela al piano β. ■

Proposizione 1.6.2 (*)

Se una retta *r* è incidente con un piano α ed il piano α è parallelo ad una piano β allora la retta *r* è incidente con il piano β.

DIMOSTRAZIONE

Per il Teorema 1.6.1 si ha che la retta r o è parallela al piano β oppure è incidente col piano β ed un caso ne esclude l'altro. Adesso si osservi che la retta r, per il Teorema 1.4.1, non è parallela al piano α e quindi non può essere parallela al piano β altrimenti da β//α, per la Proposizione 1.6.1, seguirebbe r//α. ▪

Proposizione 1.6.3 (*)

Per una retta *r* parallela ad un piano α passa un solo piano β parallelo al piano α.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{D}$ la direzione della retta r e $\mathcal{G}$ la giacitura del piano α. L'ipotesi r//α, per la Definizione 1.6.2, significa che $\mathcal{D}$ appartiene a $\mathcal{G}$. Il Lemma 1.6.1 assicura l'esistenza e l'unicità del piano β di giacitura $\mathcal{G}$ passante per la retta r: tale piano, a norma della Definizione 1.5.2, è parallelo al piano α. ▪

NOTE

(11) – Si osservi che questa definizione di appartenenza non corrisponde propriamente né alla nozione di appartenenza insiemistica né quella di inclusione insiemistica. Una direzione, infatti, è un insieme di rette tutte parallele tra di loro, ed una giacitura è un insieme di piani tutti paralleli tra di loro, quindi dire che una direzione appartiene ad una giacitura non ha alcun significato nel senso dell'appartenenza e/o dell'inclusione insiemistica. In altre parole, ragionando per insiemi, si comprende facilmente che una direzione non è, e non può essere, elemento o sottoinsieme di una giacitura: gli elementi di una giacitura sono i singoli piani (paralleli) di cui essa è costituita, dunque non possono essere insiemi di rette (parallele), mentre i possibili sottoinsiemi (non vuoti) di una giacitura sono a loro volta costituiti da piani e non da rette. Dal punto di vista puramente insiemistico si può solo dire che se una direzione appartiene ad una giacitura allora i punti di cui

sono costituite le rette della direzione formano un sottoinsieme dell'insieme dei punti di cui sono costituiti i piani della giacitura.

(12) – Anche per le relazioni possibili tra retta e piano di $\mathcal{E}^3$, come per quelle tra due piani (nota 10), non esiste il terzo caso, di retta e piano non paralleli e contemporaneamente non incidenti, come avviene invece per le rette (sghembe).

COMPLEMENTO 1.A

É opportuno richiamare alcuni concetti di base sugli insiemi e non solo.

Insiemi e Applicazioni tra Insiemi.

Sia S un insieme. Per indicare che un ente x è un *elemento* di S si usa il simbolo

$$x \in \mathrm{S}$$

e in questo caso si dice anche che x *appartiene* ad S. Per denotare invece che l'ente x non è un elemento di S si usa il simbolo

$$x \notin \mathrm{S}$$

e si dice che x *non appartiene* ad S.

Sia $\mathscr{P}$ (lettera P maiuscola corsivo) una proprietà. Se x è un ente per il quale la proprietà $\mathscr{P}$ è vera, si usa una delle scritture

$$x \mid \mathscr{P} \quad \text{e} \quad x : \mathscr{P}$$

(ciascuna delle quali va letta "x tale che $\mathscr{P}$"). Inoltre l'insieme degli enti per i quali la proprietà $\mathscr{P}$ è vera si denota indifferentemente con uno dei simboli $\{x \mid \mathscr{P}\}$ e $\{x : \mathscr{P}\}$.

Siano $\mathscr{P}$ e $\mathscr{P}'$ proprietà. Si dice che $\mathscr{P}$ *implica* $\mathscr{P}'$, e si usa il simbolo

$$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{P}'$$

se non esiste alcun ente per il quale $\mathscr{P}$ sia vera e $\mathscr{P}'$ sia falsa.

L'affermazione "*esiste un ente x*" sarà rappresentata col simbolo $\exists x$, mentre per l'affermazione "*qualunque sia x* " si userà la scrittura $\forall x$. I simboli $\exists$ e $\forall$ si chiamano rispettivamente *quantificatore esistenziale* e *quantificatore universale*.

Esistono proprietà false per ogni ente; tale è ad esempio la proprietà $x \neq x$.
Si conviene che una proprietà falsa per ogni ente determini un insieme privo di elementi, chiamato *insieme vuoto* e denotato col simbolo $\emptyset$.

Se S è un insieme e $\mathscr{P}$ è una proprietà, il sottoinsieme di S costituito dagli elementi per i quali la proprietà $\mathscr{P}$ è vera si denota con uno dei simboli

$$\{x \in S \mid \mathscr{P}\} \quad e \quad \{x \in S : \mathscr{P}\}.$$

Se S e T sono insiemi, la scrittura

$$S=T$$

denota che S e T sono costituiti dagli stessi elementi, mentre la scrittura

$$S \neq T$$

denota che S e T non sono costituiti dagli stessi elementi, cioè che esiste un elemento di S che non è elemento di T oppure un elemento di T che non è elemento di S.

Siano S e T insiemi. Si dice che S è *contenuto* in T, oppure che T *contiene* S, e si usa una qualunque delle scritture

$$S \subseteq T \quad e \quad T \supseteq S,$$

se non esiste alcun elemento si S che non sia anche elemento di T. In questo caso si dice anche che S è *incluso* in T oppure che T *include* S, o ancora che S è una *parte*, oppure un *sottoinsieme*, di T. Per denotare che l'insieme S non è contenuto nell'insieme T si usa uno dei simboli

$$S \nsubseteq T \quad e \quad T \nsupseteq S.$$

Ovviamente l'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme, e qualunque sia l'insieme S risulta $S \subseteq S$. Dalla definizione segue subito che, se S e T sono insiemi, si ha $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$ se e solo se $S=T$.

Se S è un insieme e x è un ente, si ha $\{x\} \subseteq S$ se e solo se x è un elemento di S. Con abuso di locuzione, in questo caso si dice anche che S contiene l'elemento x. Si osservi che $x \neq \{x\}$, in quanto il primo simbolo rappresenta l'ente x ed il secondo l'insieme il cui unico elemento è l'ente x.

Sia S un insieme. L'insieme i cui oggetti sono i sottoinsiemi di S si chiama *insieme delle parti*, o *insieme potenza*, di S, e si denota col simbolo P(S). Qualunque sia l'insieme S, l'insieme P(S) non è vuoto, in quanto gli appartengono almeno i *sottoinsiemi banali* $\varnothing$ e S di S. Ad esempio risulta $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$ e $P(P(\varnothing))=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Siano S e T insiemi. Si dice *unione* di S e T, e si denota col simbolo

$$S\cup T,$$

l'insieme di tutti gli oggetti che appartengono ad almeno uno degli insiemi S e T. Evidentemente, S e T sono ambedue sottoinsiemi di $S\cup T$, mentre ogni insieme che include sia S che T contiene anche $S\cup T$. In particolare, S è incluso in T se e solo se $S\cup T=T$, da cui anche $\varnothing\cup T=T$.

La nozione di unione di due insiemi può essere estesa nel modo seguente. Se $\mathscr{F}$ (lettera F maiuscola corsivo) è un insieme non vuoto di insiemi, si dice *unione* degli elementi di $\mathscr{F}$, e si denota col simbolo

$$\bigcup_{X\in\mathscr{F}} X,$$

l'insieme degli oggetti che appartengono ad almeno uno degli elementi di $\mathscr{F}$. Ovviamente si ha

$$\cup\varnothing=\varnothing.$$

Siano S e T insiemi. Si dice *intersezione* di S e T, e si denota col simbolo

$$S\cap T,$$

l'insieme di tutti gli oggetti che appartengono sia ad S che a T.
Evidentemente $S\cap T$ è un sottoinsieme comune di S e T, mentre ogni insieme che sia incluso sia in S che in T è contenuto anche in $S\cap T$. In particolare, S è incluso in T se e solo se $S\cap T=S$. Due *insiemi* S e T si dicono *disgiunti* se $S\cap T=\varnothing$, cioè se non esistono elementi comuni a S e T.
Ovviamente $S\cap\varnothing=\varnothing\cap S=\varnothing$ per ogni insieme S, sicché l'insieme vuoto è disgiunto da ogni insieme.

Anche la nozione di intersezione di due insiemi può essere estesa nel seguente modo. Se $\mathscr{F}$ è un insieme non vuoto di insiemi, si dice *intersezione* degli elementi di $\mathscr{F}$, e si denota col simbolo

$$\bigcap_{X\in\mathscr{F}} X,$$

l'insieme degli oggetti che appartengono a ciascuno degli elementi di $\mathscr{F}$. Ovviamente si ha

$$\cap\varnothing=\varnothing.$$

Sia S un insieme non vuoto. Un insieme $\mathcal{F}$ di parti non vuote di S si dice una *partizione* di S se gli elementi di $\mathcal{F}$ sono a due a due disgiunti e

$$\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X=S;$$

ad esempio, qualunque sia l'insieme non vuoto S, ciascuno degli insiemi $\{S\}$ e $\{\{x\} \mid x\in S\}$ è una partizione di S.

Siano S e T insiemi. Si dice *differenza* di S e T, e si denota col simbolo

$$S\setminus T,$$

l'insieme di tutti gli oggetti che appartengono a S ma non appartengono a T. Chiaramente $S\setminus T$ è un sottoinsieme di S, e risulta

$$(S\setminus T)\cap T=\varnothing.$$

Se X è una parte dell'insieme S, la differenza $S\setminus X$ si dice anche *complemento* di X in S, e si ha

$$(S\setminus X)\cup X=S.$$

Siano x e y enti. L'insieme

$$\{\{x\},\{x,y\}\}$$

si dice *coppia ordinata di prima coordinata* x e *seconda coordinata* y e si denota col simbolo

$$(x,y).$$

Dalla definizione segue in particolare che $(x,x)=\{\{x\}\}$.

Si ha che due coppie (x_1,y_1) e (x_2,y_2) coincidono se e solo se $x_1=x_2$ e $y_1=y_2$. Infatti, la condizione è ovviamente sufficiente. Si supponga quindi che $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$. Se $x_1=y_1$, si ha $(x_1,y_1)=\{\{x_1\}\}$, per cui anche $(x_2,y_2)=\{\{x_2\},\{x_2,y_2\}\}$ è costituito da un solo elemento, e dunque $x_1=x_2=y_2$. Sia $x_1\neq y_1$. Da $\{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\}= =\{\{x_2\}, \{x_2,y_2\}\}$ segue allora $x_2\neq y_2$, per cui $\{x_1\}=\{x_2\}$ e $\{\{x_1,y_1\}\}= =\{x_2,y_2\}$. Pertanto si ha $x_1=x_2$ e $y_1=y_2$.

Siano S e T insiemi. Si dice *prodotto cartesiano* di S e T, e si denota col simbolo

$$S\times T,$$

l'insieme di tutte le coppie (x,y), con x appartenente a S e y appartenente a T. Risulta ovviamente $S\times\varnothing=\varnothing\times S=\varnothing$, per ogni insieme S.

Per quanto riguarda i prodotti cartesiani di insiemi non vuoti, si ha invece:

Proposizione 1.A.1

Siano S e T insiemi non vuoti. Allora S×T=T×S se e solo se S=T.

DIMOSTRAZIONE

La condizione è ovviamente sufficiente.

Reciprocamente, sia S×T=T×S, e si consideri un qualunque elemento x di S. Se y è un elemento di T, la coppia (x,y) appartiene a S×T=T×S, per cui x appartiene a T. Pertanto S è contenuto in T. Similmente si prova che T è contenuto in S, per cui S=T. ▪

Se S è un insieme, il prodotto cartesiano S×S, si dice *quadrato cartesiano* di S, e si denota col simbolo S^2. Il sottoinsieme di S^2 costituito da tutte le coppie del tipo (x,y) con x in S, si dice *diagonale* di S^2, e si denota col simbolo $diag(S^2)$.

Siano S e T insiemi non vuoti. Si dice *corrispondenza* tra S e T ogni coppia del tipo

$$(S\times T, G),$$

con G sottoinsieme di S×T. L'insieme G si chiama *grafico* della corrispondenza.

Sia $r=(S\times T,G)$ una corrispondenza tra gli insiemi non vuoti S e T, e siano x un elemento di S e y un elemento di T. Si dice che *x è nella corrispondenza r con y*, e si usa la notazione xry, se la coppia (x,y) appartiene al grafico G. La scrittura $x\not{r}y$ indica invece che x e y non sono nella corrispondenza r, cioè che la coppia (x,y) non appartiene a G. Dicesi *dominio* della corrispondenza r, e si indica con $dom(r)$, l'insieme degli $x\in S$ tali che esiste un $y\in T$ per cui xry. Si dice *immagine* della corrispondenza r, e si indica con $im(r)$, l'insieme degli $y\in T$ tali che esiste un $x\in S$ per cui xry. Si dice, in fine, *campo* della corrispondenza r, e si indica con $cmp(r)$ l'insieme $dom(r)\cup im(r)$.

Siano S e T insiemi non vuoti. Una corrispondenza $f=(S\times T,G)$ tra S e T si dice un'*applicazione*, *o funzione*, *di* S *in* T se per ogni elemento x di S esiste uno e un solo elemento y di T tale che xfy, cioè se per ogni $x\in S$ il grafico G di f contiene una e una sola coppia di prima coordinata x. Se $f=(S\times T,G)$ è un'applicazione di S in T si usa la notazione

$$f: S\rightarrow T,$$

e gli insiemi S e T si chiamano rispettivamente *dominio* e *codominio* dell'applicazione f.

Evidentemente, qualunque sia l'insieme non vuoto S, la relazione identica i_S è un'applicazione di S in sé, chiamata *applicazione identica* di S.

Se $f : S \to T$ è un'applicazione di S in T, l'unico corrispondente in T dell'elemento x di S si dice *immagine di x mediante f*, e si denota col simbolo $f(x)$. Allora il grafico di f è l'insieme $\{(x,f(x)) \mid x \in S\}$, e la applicazione f viene anche indicata col simbolo

$$f : x \in S \to f(x) \in T.$$

Se f e g sono applicazioni, si ha $f=g$ se e solo se f e g hanno lo stesso dominio, lo stesso codominio, ed inoltre $f(x)=g(x)$ per ogni elemento x del dominio di f e g.

Siano S e T insiemi non vuoti, e sia $f : S \to T$ un'applicazione. Se X è una parte di S, si chiama *immagine del sottoinsieme* X *mediante f*, e si denota col simbolo $f(X)$, il sottoinsieme di T costituito dalle immagini mediante f degli elementi di X, cioè si pone

$$f(X)=\{y \in T \mid (\exists x \in X \mid f(x)=y)\}.$$

Si ha ovviamente che, se X e X' sono sottoinsiemi di S tali che $X \subseteq X'$, risulta $f(X) \subseteq f(X')$.

Siano S e T insiemi non vuoti e sia $f : S \to T$ un'applicazione. Se Y è una parte di T, si dice *antimmagine di* Y *mediante f*, e si denota col simbolo $f^{-1}(Y)$, il sottoinsieme di S costituito dagli elementi le cui immagini mediante f appartengono a Y, cioè si pone

$$f^{-1}(Y)=\{x \in S \mid f(x) \in Y\}.$$

Siano S e T insiemi non vuoti e sia $f : S \to T$ un'applicazione. Se X è una parte di S e x è un elemento di X, si ha $f(x) \in f(X)$, e quindi x appartiene all'antimmagine $f^{-1}(f(X))$. Dunque $X \subseteq f^{-1}(f(X))$. Sia invece Y un sottoinsieme del codominio T di f. Qualunque sia l'elemento y di $f(f^{-1}(Y))$ risulta $y=f(x)$, con $x \in f^{-1}(Y)$. Allora $y=f(x)$ appartiene a Y, e perciò $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$. È però opportuno notare che in generale risulta $f^{-1}(f(X)) \neq X$ e $f(f^{-1}(Y)) \neq Y$.

Siano S e T insiemi non vuoti. Un'*applicazione* $f : S \to T$ si dice *iniettiva*, o che è una *iniezione*, se per ogni coppia (x,x') di elementi distinti di S risulta $f(x) \neq f(x')$, cioè se per ogni elemento y di T il grafico di f contiene al più una coppia con seconda coordinata y. Quindi f è iniettiva se e solo se per ogni coppia

(x,x') di elementi di S tali che $f(x)=f(x')$, si ha anche $x=x'$. Si dice invece che f è *suriettiva*, o che è una *suriezione,* se per ogni elemento y di T esiste almeno un elemento x di S tale che $f(x)=y$, cioè se per ogni elemento y di T il grafico di f contiene almeno una coppia con seconda coordinata y. Si dice infine che l'*applicazione f* è *biiettiva*, o che è una *biiezione*, se f è sia iniettiva che suriettiva. Allora l'applicazione f è biettiva se e soltanto se per ogni elemento y di T il grafico di f contiene una e una sola coppia con seconda coordinata y.

Le applicazioni iniettive e suriettive possono essere caratterizzate mediante proprietà delle antimmagini dei sottoinsiemi. Infatti se S e T sono insiemi non vuoti e f : S→T è un'applicazione, si ha ovviamente che f è iniettiva se e solo se per ogni $y\in$T l'antimmagine $f^{-1}(\{y\})$ è vuota oppure costituita da un solo elemento, mentre f è suriettiva se e soltanto se $f^{-1}(\{y\})\neq\emptyset$ per ogni elemento y di T. Come conseguenza l'applicazione f è biettiva se e solo se per ogni y di T lo insieme $f^{-1}(\{y\})$ è costituito da un solo elemento. Si osservi infine che f è suriettiva se e soltanto se f(S)=T.

Relazioni di Equivalenza.

Sia S un insieme non vuoto. Una relazione binaria r in S si dice una *relazione di equivalenza* se è:

- *riflessiva*, cioè se $\forall x\in cmp(r)$ risulta $(x,x)\in r$;
- *simmetrica*, cioè se $\forall x,y\in$S risulta $(x,y)\in r\Rightarrow(y,x)\in r$;
- *transitiva*, cioè se $\forall x,y,z\in$S risulta $(x,y)\in r\wedge(y,z)\in r\Rightarrow(x,z)\in r$.

In particolare, qualunque sia l'insieme non vuoto S, la relazione identica $\imath_S$ e la relazione totale τ_S sono relazioni di equivalenza in S.

Sia S un insieme non vuoto, e sia r una relazione di equivalenza in S. Se x e y sono elementi di S tali che xry, si dice che x e y sono *equivalenti modulo r*, e si usa la notazione

$$x\equiv y(mod)r\ ,$$

per denotare invece che x e y non sono equivalenti modulo r si usa la scrittura

$$x\not\equiv y(mod)r\ .$$

Se x è un elemento di S, il sottoinsieme di S costituito dagli elementi y tali che $x \equiv y(mod)r$ si chiama *classe di equivalenza* di x modulo r, e si denota col simbolo $[x]_r$.

Poiché la relazione r è riflessiva, $\forall x \in S$ si ha $x \equiv x(mod)r$, e quindi $x \in [x]_r$.

Lemma 1.A.1

Siano S un insieme non vuoto e *r* una relazione di equivalenza in S. Se *x* e *y* sono elementi di S, risulta $[x]_r = [y]_r$ se e solo se $x \equiv y(mod)r$.

DIMOSTRAZIONE

Si supponga in primo luogo $[x]_r = [y]_r$. Allora y appartiene a $[x]_r$, e cioè $x \equiv y(mod)r$. Reciprocamente, se $x \equiv y(mod)r$ si ha anche $y \equiv x(mod)r$, in quanto r è simmetrica. Sia z un elemento della classe di equivalenza $[x]_r$. Allora $x \equiv z(mod)r$, e dunque $y \equiv z(mod)r$ giacché r è transitiva, per cui z appartiene a $[y]_r$. Allo stesso modo si prova che ogni elemento di $[y]_r$ è in $[x]_r$, e quindi $[x]_r = [y]_r$. ▪

Sia S un insieme non vuoto, e siano r una relazione di equivalenza in S e x un elemento di S. Se y è un elemento di $[x]_r$, il lemma assicura che $[y]_r = [x]_r$. Per questo motivo ogni elemento di $[x]_r$ si dice un *rappresentante* di $[x]_r$.

Lemma 1.A.2

Siano S un insieme non vuoto e *r* una relazione di equivalenza in S. Se $[x]_r$ e $[y]_r$ sono classi di equivalenza distinte, risulta

$$[x]_r \cap [y]_r = \varnothing$$

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo esista un elemento z in $[x]_r \cap [y]_r$. Allora si ha $x \equiv z(mod)r$ e $y \equiv z(mod)r$, e dal lemma precedente segue $[x]_r = [z]_r = [y]_r$, contro l'ipotesi. Pertanto le classi di equivalenza $[x]_r$ e $[y]_r$ sono disgiunte. ▪

Siano S un insieme non vuoto e r una relazione di equivalenza in S. L'insieme delle classi di equivalenza modulo r degli elementi di S si chiama *insieme quoziente* di S rispetto a r, e si denota col simbolo S/r. Poiché ogni elemento x di S appartiene a $[x]_r$, gli elementi di S/r sono non vuoti, e risulta

$$\bigcup_{X \in S/r} X = S\ .$$

D'altra parte, gli elementi di S/r sono a due a due disgiunti per il lemma testé dimostrato, e quindi l'insieme quoziente S/r è una partizione di S. In particolare si ha $S/i_S = \{\{x\} \mid x \in S\}$ e $S/\tau_S = \{S\}$. È possibile dimostrare che ogni partizione di un insieme non vuoto è determinata da una relazione di equivalenza. Si ha infatti:

Teorema 1.A.1

Siano S un insieme non vuoto e $\mathscr{F}$ una partizione di S. Allora esiste una unica relazione di equivalenza $r_{\mathscr{F}}$ in S tale che S/$r_{\mathscr{F}}$ =$\mathscr{F}$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $r_{\mathscr{F}}$ la relazione binaria in S definita ponendo $x\ r_{\mathscr{F}}\ y$ se e solo se x e y sono elementi di S che appartengono ad uno stesso elemento di $\mathscr{F}$. Ovviamente la relazione $r_{\mathscr{F}}$ è simmetrica. Poiché

$$S=\bigcup_{X\in S/r} X,$$

ogni elemento x di S appartiene a qualche X∈$\mathscr{F}$, per cui $x\ r_{\mathscr{F}}\ y$ e $r_{\mathscr{F}}$ è riflessiva. Siano x, y, z elementi di S tali che $x\ r_{\mathscr{F}}\ y$ e $y\ r_{\mathscr{F}}\ z$. Allora esistono degli elementi X e Y di $\mathscr{F}$ tali che $\{x,y\}\subseteq X$ e $\{y,z\}\subseteq Y$, sicché y appartiene a $X\cap Y$ e $X\cap Y\neq\emptyset$. D'altra parte gli elementi di $\mathscr{F}$ sono a due a due disgiunti, per cui X=Y e $\{x,z\}\subseteq X$. Dunque $x\ r_{\mathscr{F}}\ z$ e $r_{\mathscr{F}}$ è anche transitiva. Pertanto $r_{\mathscr{F}}$ è una relazione di equivalenza in S.

Sia x un elemento di S, e sia X l'unico elemento di $\mathscr{F}$ contenente x. Un elemento y di S appartiene a $[y]_{r_{\mathscr{F}}}$ se e soltanto se x e y appartengono ad uno stesso elemento di $\mathscr{F}$, e quindi se e solo se y appartiene a X. Allora $[x]_{r_{\mathscr{F}}}$=X e S/$r_{\mathscr{F}}$=$\mathscr{F}$. Sia r una qualunque relazione di equivalenza in S tale che S/r=$\mathscr{F}$, e siano x e y elementi di S. Si ha $x\equiv y(mod)r$ se e soltanto se $[x]_r=[y]_r$, e quindi se e soltanto se x e y appartengono ad uno stesso elemento di $\mathscr{F}$. Pertanto $r=r_{\mathscr{F}}$, e l'asserto è provato. ▪

Ordinamento - Il Teorema di Cantor, Schröder, Bernstein.

Sia S un insieme non vuoto. Una relazione binaria r in S si dice una *relazione d'ordine parziale* o, più semplicemente, *relazione d'ordine* se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva, se cioè risulta:

- xrx per ogni elemento x di S (*riflessività*);
- se da xry e yrx segue $x=y$ (*antisimmetria*);
- se qualunque siano gli elementi x, y e z di S tali che xry e yrz, si ha anche xrz (*transitività*).

Si osservi che, qualunque sia l'insieme S, la relazione binaria r in P(S), definita ponendo XrY se e solo se X e Y sono parti di S tali che $X \subseteq Y$, è una relazione d'ordine in P(S), chiamata *relazione di inclusione* e denotata col simbolo $\subseteq$.

Sia S un insieme non vuoto. Una relazione d'ordine in S è in generale denotata, quando non vi sia possibilità di equivoco, col simbolo $\leq$, che si legge "*minore o uguale*".

Sia S un insieme non vuoto, e sia $\leq$ una relazione d'ordine in S. La coppia $(S,\leq)$ si chiama *insieme ordinato* o *parzialmente ordinato*, e l'insieme S si dice *sostegno* di tale insieme ordinato. Se esiste una relazione di ordine $\leq$ in un insieme S non vuoto, esso è detto anche *insieme ordinabile*.

Siano $(S_1,\leq_1)$ e $(S_2,\leq_2)$ due insiemi ordinati, un applicazione $f: S_1 \rightarrow S_2$ tra i due insiemi ordinati si dice che *conserva l'ordine* se, per $x,y \in S_1$, $x \leq_1 y$ implica $f(x) \leq_2 f(y)$.

Se $(S,\leq)$ è un insieme ordinato, gli *elementi* x e y di S si dicono *confrontabili* se risulta $x \leq y$ oppure $y \leq x$, cioè se il grafico di $\leq$ contiene almeno una delle coppie (x,y) e (y,x).

Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato, e sia X una parte non vuota di S. Un elemento y di S si dice un *minorante* di X se risulta $y \leq x$ per ogni elemento x di X e l'insieme X si dice *limitato inferiormente*; se non esiste un tale y, X si dice *illimitato inferiormente*. Simmetricamente, un elemento y di S si dice un *maggiorante* di X se risulta $x \leq y$ per ogni elemento x di X e l'insieme X si dice *limitato superiormente*; se non esiste un tale y, X si dice *illimitato superiormente*.

Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato, e sia X una parte non vuota di S. Un elemento $\underline{x}$ di X si dice *minimo* di X se è un minorante di X, cioè se risulta $\underline{x} \leq x$ per ogni elemento x di X. Si prova subito che se la parte non vuota X di S è dotata di minimo, questo è unico. Infatti se $\underline{x}$ e $\underline{x}'$ sono minimi di X, si ha $\underline{x} \leq \underline{x}'$ e $\underline{x}' \leq \underline{x}$, per cui $\underline{x} = \underline{x}'$. L'eventuale minimo della parte X non vuota di S si denota col simbolo

$$min(X).$$

Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato, e sia X una parte non vuota di S. Un elemento $\underline{x}$ di X si dice *massimo* di X se è un maggiorante di X, cioè se risulta $x \leq \underline{x}$ per ogni elemento x di X Anche in questo caso si prova subito che, se X è dotato di massimo, questo è unico. L'eventu-ale massimo di X si denota col simbolo

$$max(X).$$

Ad esempio, qualunque sia l'insieme S, nell'insieme ordinato $(P(S),\subseteq)$ si ha $\emptyset = min(P(S))$ e $S=max(P(S))$.

Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato, se S è dotato di minimo questo è l'unico elemento minimale. Si osservi però che un insieme ordinato può essere dotato di più elementi minimali. Ad esempio, se S è un insieme non costituito da un solo elemento, nell'insieme ordinato $(P(S)\setminus\{\emptyset\},\subseteq)$ gli elementi minimali sono i sottoinsiemi del tipo $\{x\}$, con $x\in S$. Similmente, è chiaro che se l'insieme ordinato S è dotato di massimo, questo è l'unico elemento massimale. D'altra parte, qualunque sia l'insieme S non costituito da un solo elemento, per ogni $x\in S$ il sottoinsieme $S\setminus\{x\}$ è un elemento massimale dell'insieme ordinato $(P(S)\setminus\{\emptyset\},\subseteq)$.

Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato e X una parte non vuota di S. L'*estremo inferiore* di X è, se esiste, il massimo dei minoranti, cioè un elemento $\underline{y}$ di S, che è un minorante di X e tale che, per ogni altro eventuale minorante z di X, $z\leq\underline{y}$. Dalla definizione segue allora che un elemento $\underline{y}$ di S è l'estremo inferiore della parte non vuota X se e solo se $\underline{y}\leq x$ per ogni x in X e inoltre per ogni elemento z di S tale che $\underline{y}<z$ esiste $x\in X$ tale che: o $x<z$, dove $<$ è la relazione di ordine stretto in S determinata da $\leq$, oppure x e z non sono confrontabili. L'estremo inferiore, se esiste, è unico; infatti esso è il massimo di un insieme ordinato. L'eventuale estremo inferiore della parte X non vuota di S si denota col simbolo

$$inf(X).$$

Se $inf(X)\in X$ allora è il minimo; il minimo, se esiste, è anche l'estremo inferiore.

Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato e X una parte non vuota di S. L'*estremo superiore* di X è, se esiste, il minimo dei maggioranti, cioè un elemento $\underline{y}$ di S, che è un maggiorante di X e tale che, per ogni altro eventuale maggiorante z di X, $\underline{y}\leq z$. L'estremo superiore, se esiste, è unico; infatti esso è il minimo di un insieme ordinato. L'eventuale estremo superiore della parte X non vuota di S si denota col simbolo

$$sup(X).$$

Se $sup(X)\in X$ allora è il massimo; il massimo, se esiste, è anche l'estremo superiore.

Lemma 1.A.3

Per un insieme ordinato $(S,\leq)$ sono equivalenti le seguenti affermazioni:

a) Ogni parte inferiormente limitata di S è dotata di estremo inferiore

b) Ogni parte superiormente limitata di S è dotata di estremo superiore.

DIMOSTRAZIONE

Si supponga verificata la condizione a), e sia X una parte superiormente limitata di S. Allora l'insieme Y dei maggioranti di X è non vuoto, ed è ovviamente una parte inferiormente limitata di S. Pertanto Y è dotato di estremo inferiore $\underline{y}$. Poiché ogni elemento di X è un minorante di Y, si ha che $\underline{y}$ è un maggiorante di X, per cui $\underline{y} \in Y$. Allora $\underline{y}$ è il minimo di Y, e quindi l'estremo superiore di X. In modo analogo si prova che se vale la condizione b), allora ogni parte inferiormente limitata di S è dotata di estremo inferiore. ▪

Un insieme ordinato $(S,\leq)$ si dice *completo* se verifica una delle condizioni equivalenti a) e b) considerate nel Lemma 1.A.3. In particolare, se l'insieme ordinato $(S,\leq)$ è dotato di minimo e di massimo, allora S è completo se e solo se ogni sua parte non vuota è dotata di estremo inferiore e di estremo superiore. Qualunque sia l'insieme S, l'insieme ordinato $(P(S),\subseteq)$ è completo, in quanto per ogni insieme non vuoto $\mathscr{F}$ di parti di S risulta

$$inf(\mathscr{F})=\bigcap_{X\in\mathscr{F}} X \quad \text{e} \quad sup(\mathscr{F})=\bigcup_{X\in\mathscr{F}} X.$$

Vale il seguente notevole:

Lemma 1.A.4 (Tarski)

Sia $(S,\leq)$ un ordine parziale tale che ogni $X\subseteq S$ abbia estremo superiore (*insieme completo*); ogni applicazione f : $S\rightarrow S$ che conserva l'ordine (cioè $x\leq y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$) ha almeno un punto fisso.

DIMOSTRAZIONE

Si consideri l'insieme

$$Y=\{x\in S \mid x\leq f(x)\}$$

e sia $z=sup(Y)$. Si noti che z esiste anche se $Y=\emptyset$, perché, per l'ipotesi di completezza di S, anche $\emptyset$, essendo un sottoinsieme di S, ammette l'estremo superiore; di fatto tale insieme non è vuoto, perché $sup(\emptyset)$ risulta, come si vede facilmente, il minimo rispetto a $\leq$ (ogni elemento di S è un maggiorante dell'insieme $\emptyset$ e quindi le ipotesi fatte assicurano che S ha un minimo rispetto a $\leq$) dunque

$$sup(\emptyset)\leq f(sup(\emptyset))\Rightarrow sup(\emptyset)\in Y.$$

Ora, per ogni $x \in$S, se $x \leq f(x)$ si ha $x \leq z$, quindi $f(x) \leq f(z)$ e $f(z)$ è un maggiorante di Y, dunque $z \leq f(z)$; d'altra parte di qui segue anche $f(z) \leq f(f(z))$, quindi $f(z) \in$Y e allora $f(z) \leq z$, da cui $f(z)=z$. ▪

Utilizzando il lemma di Tarsi dimostriamo infine:

Teorema 1.A.2 (Cantor, Schröder, Bernstein)

Qualunque siano gli insiemi non vuoti S e T se esiste una iniezione dell'insieme S nell'insieme T ed una iniezione dell'insieme T nell'insieme S, allora esiste una biiezione tra l'insieme S e l'insieme T.

DIMOSTRAZIONE

Siano, dunque, f : S→T un' iniezione di S in T e g : T→S una iniezione di T in S, con $f(S)=T_1 \subseteq T$ e $g(T)=S_1 \subseteq S$. Se $T_1=T$, o $S_1=S$, allora f, o rispettivamente g, è biiettiva, e non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo perciò che $T_1 \neq T$ e $S_1 \neq S$. Se esiste una partizione di S, $S=S_1 \cup S_2$ con $S_1 \cap S_2=\emptyset$, e di T, $T=T_1 \cup T_2$ con $T_1 \cap T_2=\emptyset$, tali che $T_1=f(S_1)$ e $S_2=g(T_2)$ allora, tenendo presente le proprietà delle applicazioni iniettive e biettive evidenziate in precedenza, si potrà definire una biiezione h : S↔T tra S e T ponendo: $h(x)=f(x)$ se $x \in S_1$, e $h(x)=g^{-1}(x)$ se $x \in S_2$.

A questo scopo si consideri la funzione F di sottoinsiemi di S in sottoinsiemi di S, F : P(S)→P(S), definita per X∈P(S) da $F(X)=S \backslash g(T \backslash f(X))$, se esiste un X⊆S tale che $F(X)=X$, la dimostrazione è immediata allorquando si pone $S_1=X$ quindi $S_2=S \backslash X$, e $T_1=f(X)$ dunque $T_2=T \backslash f(X)$, perché da $T_1=f(X)$ e $S_1=X$ segue $T_1=f(S_1)$ e da $F(X)=X$ e $S_2=S \backslash X$ segue

$$S_2=S \backslash F(X)=g(T \backslash f(X))=g(T \backslash T_1)=g(T_2).$$

Resta allora da dimostrare che F ha un *punto fisso*, cioè un $X \in dom(F)$ tale che $X=F(X)$. Questo deriva dal lemma 1.A.4 (Tarski), ove si osservi che (P(S),⊆) soddisfa le condizioni del Lemma e che F è crescente rispetto all'ordine ⊆ di P(S), cioè se X⊆Y⊆S allora $F(X) \subseteq F(Y)$: infatti se X⊆Y allora, per il fatto che f è un'applicazione, $f(X) \subseteq f(Y)$ e $T \backslash f(Y) \subseteq T \backslash f(X)$ e ancora, per il fatto che g è un'applicazione, $g(T \backslash f(Y)) \subseteq g(T \backslash f(X))$ ed infine

$$S \backslash g(T \backslash f(X)) \subseteq S \backslash g(T \backslash f(Y)) \text{ cioè } F(X) \subseteq F(Y).$$ ▪

COMPLEMENTO 1.B

In questo complemento è data per scontata la nozione di numero cardinale, di cui quella di numero naturale è un caso particolare. Avvisiamo, altresì, che i risultati ottenuti sono validi anche nel caso di numeri cardinali transfiniti [13], di seguito indicati con la locuzione "*numero infinito*".

Ordine dello Spazio Affine Euclideo $\mathcal{E}^3$

Dimostriamo il seguente fondamentale:

Teorema 1.B.1 [*]

Le rette di $\mathcal{E}^3$ sono costituite dallo stesso numero di punti, finito o infinito.

DIMOSTRAZIONE

Detto l_r il numero di punti, anche infinito, di cui è costituita una retta generica r di $\mathcal{E}^3$, dall'Assioma E1 (secondo comma) segue immediatamente che $l_r \geq 2$.

Dividiamo la dimostrazione in due parti: nella prima parte dimostriamo che il teorema è valido per rette complanari, nella seconda parte estendiamo il risultato ad ogni retta dello spazio.

Sia dunque σ un piano passante per la retta *r*, e sia *r*' una retta distinta da *r* ed appartenente al piano σ (il Corollario 1.2.5 e la Proposizione 1.4.3 garantiscono che ad un piano appartengono almeno due rette distinte); vi sono, allora, solo due possibilità: o le rette *r* ed *r*' hanno un sol punto in comune (rette incidenti), oppure *r* ed *r*' sono propriamente parallele. Nel primo caso (con riferimento alla figura 22), detto R il punto di intersezione delle due rette, da $l_r \geq 2$ segue che su *r* esiste un secondo punto P distinto da R e da $l_{r'} \geq 2$ che su *r*' esiste un terzo punto P' diverso anch'esso da R e non appartenente ad *r*. È certamente P≠P', altrimenti per l'Assioma E1 primo comma le rette *r* ed *r*' coinciderebbero; allora, sempre per l'Assioma E1 primo comma, esiste una unica retta *s* passante per P e P', e quindi distinta sia da *r* che da *r*', la quale, per la il Lemma 1.2.1, appartiene al piano σ. Adesso, per ogni punto Q di *r* (non necessariamente distinto da P o da R), consideriamo, in forza della Proposizione 1.4.1, l'unica retta s' passante per Q e parallela ad s; tale retta s' appartiene al piano σ. Per dimostrare quest'ultima affermazione osserviamo che se il punto Q coincide col punto P allora la retta s' è la retta s stessa (riflessività della relazione di parallelismo tra rette) e quindi in tal caso la retta s' appartiene al piano σ. Se, invece Q non coincide con P allora Q è certamente non allineato con i punti P e P' (ovvero Q non appartiene alla retta s) altrimenti la retta r e la retta s avendo, in tal caso, in comune i due punti distinti P e Q, per l'Assioma E1 primo comma, coinciderebbero; dunque, se Q è distinto da P, la retta s' è propriamente parallela alla retta s, ma insieme ad s, per l'Assioma E5, appartiene ad un piano: questo piano, per l'Assioma E2 primo comma non può essere distinto dal piano σ perché passante necessariamente per tre punti non allineati P e P' della retta s e Q della retta s'. In ogni caso, dunque, la retta s', parallela alla retta s e passante per un punto qualsiasi della retta r, appartiene al piano σ. Si ha, inoltre, che le rette s' ed r' non possono essere parallele altrimenti, per la transitività della relazione di parallelismo tra rette, r' sarebbe parallela ad s contro il fatto

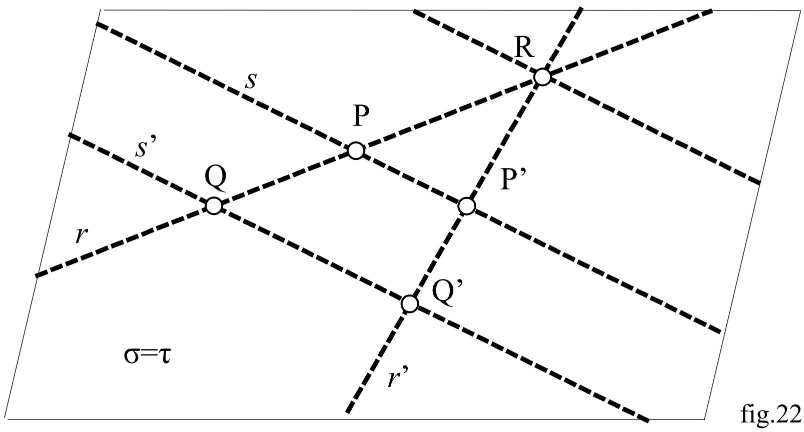


fig.22

che r' ed s hanno, per costruzione, il solo punto P' in comune. Le rette s' ed r', in definitiva, essendo rette complanari, cioè non sghembe, e contemporaneamente non parallele, per il Teorema 1.4.1, sono rette incidenti e quindi esse hanno un unico punto, Q', in comune (naturalmente, per quanto detto, quando s' coincide con s si ha che Q coincide con P e Q' con P', e quando s' passa per il punto R si ha che Q e Q' coincidono entrambi con R stesso). Abbiamo così stabilito, data l'arbitrarietà delle rette incidenti, r ed r', e del punto Q di r, un' applicazione $f : r \rightarrow r'$ tale che ad ogni punto di r associa un ben determinato punto di r' individuato dall'intersezione con la retta r' della parallela alla retta s condotta da esso. Dimostriamo adesso che tale applicazione è iniettiva. A tale scopo osserviamo che tutte le parallele alla retta s passanti per punti distinti di r

intersecano la retta *r'* in punti distinti; infatti se così non fosse si avrebbe l'assurdo dell'esistenza di due rette distinte parallele ad *s* passanti per uno stesso punto di *r'*, e ciò contraddirebbe la Proposizione 1.4.1. Ragionando allo stesso modo, partendo però dalla retta *r'* anziché da *r*, si prova l'esistenza di un'applicazione iniettiva $g : r' \rightarrow r$, ma, per un noto teorema di Teoria degli Insiemi (14), l'esistenza di due iniezioni siffatte, la *f* e la *g* appunto, implica l'esistenza di una biiezione tra *r* ed *r'*, e dunque esse sono in corrispondenza biunivoca ovvero le rette *r* ed *r'* sono costituite dallo stesso numero, finito o infinito, di punti, cioè $l_r = l_{r'}$.

Nel secondo caso (con riferimento alla figura 23) cioè nel caso in cui le due rette *r* ed *r'* del piano σ di $\mathcal{E}^3$ sono propriamente parallele, l'esistenza di una biiezione tra *r* ed *r'*, di modo che anche in questo caso risulti $l_r = l_{r'}$, è comprovata dal seguente ragionamento.
Preso un punto R di *r* ed un punto R' di *r'*, certamente è R distinto R' sennò le

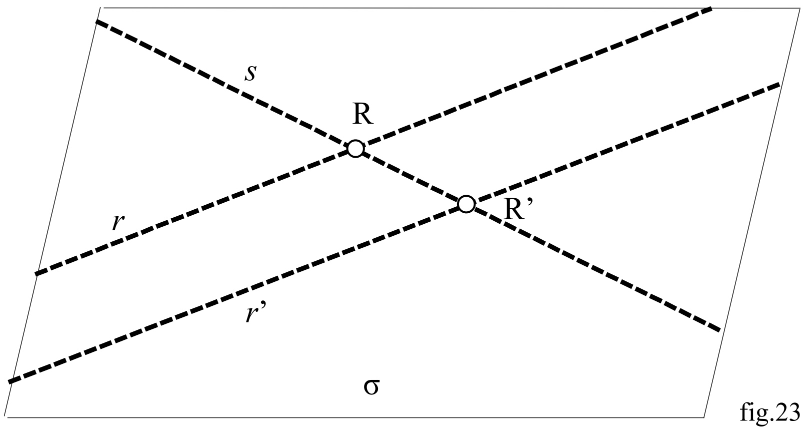


fig.23

rette cui appartengono non risulterebbero propriamente parallele, si consideri l'unica retta *s* del piano σ passante per essi; l'esistenza e l'unicità della retta *s* sono garantite al solito dall'Assioma E1 primo comma e dal Lemma 1.2.1. Per quanto detto nel caso precedente delle rette incidenti, esiste sia una biiezione tra le rette r ed s incidenti nel punto R, che una biiezione tra le rette s ed r' incidenti nel punto R'; dunque sarà $l_r = l_s$ ed $l_s = l_{r'}$, cioè $l_r = l_{r'}$.

Veniamo adesso alla seconda parte della dimostrazione, prendendo in considerazione due rette qualsiasi *r* ed *r'* di $\mathcal{E}^3$ non complanari, ovvero sghembe. Sia (con riferimento alla figura 24) R un punto della retta *r* ed R' un punto della retta *r'*, è certamente, per la Proposizione 1.3.1, R non appartenente ad *r'* e R' non appartenente ad *r*; per la Proposizione 1.2.3, il piano σ passante per la retta r ed il punto R’ fuori di essa esiste ed è unico, come pure dicasi per il piano σ’ passante per la retta r’ ed il punto R. Inoltre il piano σ, certamente distinto da σ’, ha in comune con quest’ultimo i due punti distinti R ed R’, e quindi, per il Corollario 1.2.2, i due piani hanno in comune la retta s passante per R ed R’.

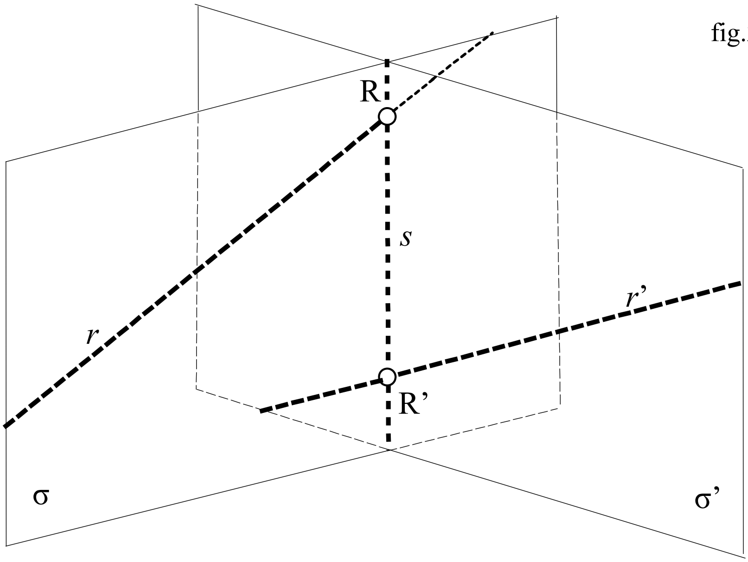


fig.24

In definitiva, la retta *s* risulta essere sia complanare secondo il piano σ con la retta *r*, sia complanare secondo il piano σ’ con la retta *r*’; allora, applicando il risultato della prima parte della dimostrazione una volta alle rette *r* ed *s* incidenti in R ed una volta alle rette *s* ed *r*’ incidenti in R’, otteniamo $l_r = l_s$ ed $l_s = l_{r'}$, cioè $l_r = l_{r'}$, che è quanto volevamo dimostrare. ▪

Alla luce di questo importante risultato, è non ambigua la seguente:

Definizione 1.B.1 (*)

Dicesi *ordine* di $\mathcal{E}^3$ il numero *l* finito o infinito di punti di una retta.

Si ha ovviamente che se uno Spazio Affine $\mathcal{E}^3$ è costituito da un numero finito di punti, ovvero se $\mathcal{E}^3$ è un insieme finito, allora esso è di ordine *l* finito, non potendo un suo sottoinsieme, cioè una retta qualsiasi di $\mathcal{E}^3$, contenere più punti di $\mathcal{E}^3$ stesso. È possibile rafforzare tale proposizione per mezzo del:

Teorema 1.B.2 (*)

Uno Spazio Affine $\mathcal{E}^3$ è finito se e solo se è di ordine finito.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{E}^3$ uno Spazio Affine Euclideo di dimensione 3 e di ordine l qualsiasi, finito o infinito, e σ un suo piano qualsiasi; dimostriamo il teorema facendo vedere, in una prima fase, che se e solo se l'ordine l è finito allora i punti distinti di σ sono in numero finito, e poi, in una seconda fase, che se e solo se l'ordine l è finito allora i piani distinti di $\mathcal{E}^3$ sono anch'essi in numero finito; da cui, per il Teorema 1.B.1, segue la tesi.

Consideriamo all'uopo (con riferimento alla figura 25) sul piano arbitrario σ di $\mathcal{E}^3$ un punto a scelta P ed una retta a scelta r non passante per P; l'esistenza in σ di almeno un punto P ed una retta r siffatti è garantita dal Corollario 1.2.5. L'Assioma E1 primo comma ed il Lemma 1.2.1 assicurano l'esistenza di rette distinte del piano σ, una per ogni punto di r, incidenti con r e passanti tutte per il punto P. Abbiamo così dimostrato l'esistenza di una applicazione iniettiva tra

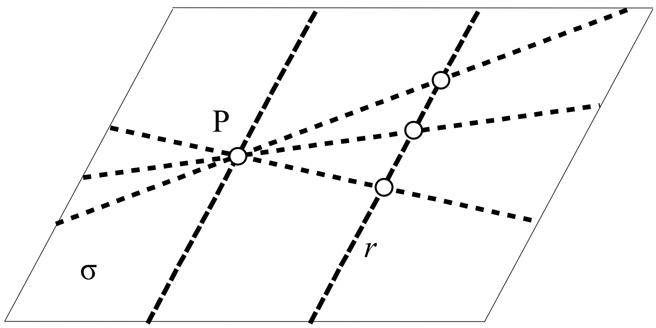


fig.25

tra i punti della retta r e le rette del piano σ non parallele alla retta r e passanti per P. Viceversa ogni retta di σ non parallela ad r e passante per P, per il Teorema 1.4.1, incide la retta r in punti che per l'Assioma E1 primo comma sono punti distinti di r. Abbiamo, dunque, dimostrato anche l'esistenza di un'applicazione iniettiva tra le rette del piano σ non parallele alla retta r e passanti per P e i punti della retta r. L'esistenza di due iniezioni tra i suddetti insiemi implica l'esistenza di una biiezione [(14)] tra gli stessi insiemi, ne consegue che il numero, finito o infinito, di rette distinte di σ non parallele ad r e passanti per P è pari al numero dei punti distinti di r, cioè pari all'ordine l, e quindi esso è finito se e solo se l è finito. Inoltre, per l'Assioma E5, esiste sul piano σ una sola retta passante per P e parallela ad r, e siccome le rette di σ, per il Teorema 1.4.1, o sono parallele alla retta r o sono incidenti con la retta r, si può concludere senza eccezioni, data l'arbitrarietà del piano σ e del suo punto P, che:

1) il numero di rette distinte di un piano passanti per un punto è pari a $l+1$ ($=l$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Consideriamo adesso l'insieme delle direzioni delle rette del piano σ. La definizione di direzione ed il Corollario 1.4.2 assicurano l'esistenza di rette distinte di σ passanti per P, una per ogni direzione di σ; esiste, cioè, un'applicazione iniettiva tra le direzioni delle rette di σ e le rette di σ passanti per P. Viceversa, la definizione di direzione ed il Teorema 1.4.1, assicurano l'esistenza di direzioni distinte di rette di σ, una per ogni retta di σ passante per P; esiste, cioè, un'applicazione iniettiva tra le rette di σ passanti per P e le direzioni delle rette di σ. L'esistenza di due iniezioni tra i suddetti insiemi implica l'esistenza di una biiezione (14) tra gli stessi insiemi, ne consegue che il numero, finito o infinito, delle direzioni distinte delle rette di σ è pari a quello delle rette distinte di σ passanti per P, e data l'arbitrarietà del piano σ e del suo punto P, detto numero è lo stesso per ogni piano di $\mathcal{E}^3$. Tenendo presente la conclusione 1) dimostrata in precedenza, possiamo anche dire:

2) il numero di direzioni distinte delle rette di un piano è pari a $l+1$ ($=l$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Infine, si ha che il numero di rette distinte di σ aventi la stessa direzione è lo stesso per ogni direzione di rette di σ ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito. Per dimostrare quest'ultima affermazione consideriamo due direzioni arbitrarie distinte $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di rette di σ; l'esistenza di almeno due rette non parallele di σ (cioè, in forza del Teorema 1.4.1, di due rette incidenti), e quindi di almeno una coppia di direzioni distinte di rette di σ, è garantita dal Corollario 1.3.6. Sia *a* una retta di σ di direzione $\mathcal{A}$ (figura 26). Per ogni punto della retta *a*, in forza del Corollario 1.4.2, passa una sola retta *b* di σ di direzione $\mathcal{B}$; inoltre si ha che per punti distinti della retta *a* passano rette distinte di σ di direzione $\mathcal{B}$, infatti, se così non fosse, se cioè esistesse una retta *b* di direzione $\mathcal{B}$ passante per due punti distinti della retta *a* allora la retta *a*, per l'Assioma E1, coinciderebbe con *b*, e cioè la retta *a*, appartenente alla direzione $\mathcal{A}$, apparterrebbe anche alla direzione $\mathcal{B}$ distinta da $\mathcal{A}$, e questo è contro il fatto che le direzioni, essendo classi di equivalenza, non hanno elementi in comune. In definitiva si è dimostrata l'esistenza di un'applicazione iniettiva tra i punti della retta *a* di σ di direzione $\mathcal{A}$ e le rette di σ di direzione $\mathcal{B}$ diversa da $\mathcal{A}$. Viceversa, ogni retta di σ di direzione $\mathcal{B}$ passa per un punto della retta *a* di σ di direzione $\mathcal{A}$ diversa da $\mathcal{B}$; infatti le rette distinte di σ di direzione $\mathcal{B}$, tutte parallele tra di loro, non sono parallele alla retta *a* sennò la retta *a* apparterrebbe a due classi di equivalenza distinte, ma trattandosi tutte di rette del piano σ, per il Teorema 1.4.1, incidono la retta *a* in punti che, per il Corollario 1.4.2, sono tutti distinti. Si è così dimostrata anche l'esistenza di un'applicazione iniettiva tra le rette di σ di direzione $\mathcal{B}$ e i punti della retta *a* di σ di direzione $\mathcal{A}$ diversa da $\mathcal{B}$.

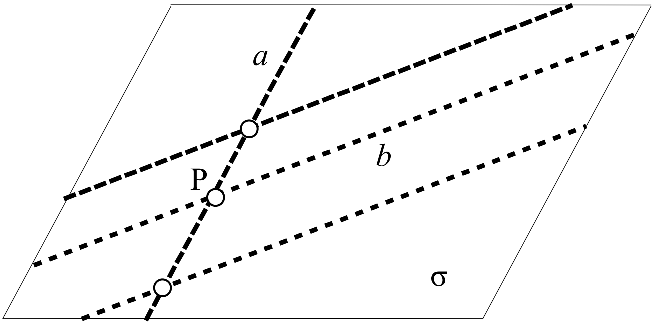


fig.26

Al solito, l'esistenza di due iniezioni tra i suddetti insiemi implica l'esistenza di una biiezione [14] tra gli stessi insiemi, ne consegue che il numero di rette distinte di σ di direzione $\mathcal{B}$ è pari al numero dei punti distinti della retta *a* di σ, e data l'arbitrarietà del piano σ e delle direzioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, possiamo affermare che il numero di rette distinte del piano σ appartenenti ad una data direzione non dipende dalla direzione scelta ed è uguale al numero dei punti distinti di una retta, cioè, per la Definizione 1.B.1, possiamo dire:

3) il numero di rette distinte di un piano aventi una data direzione è pari a l ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Inoltre, siccome ogni retta di un piano appartiene a una sola direzione ne consegue, tenendo presenti le conclusioni 2) e 3), che:

4) il numero di rette distinte di un piano è pari a $l \cdot (l+1) = l^2 + l$ $(= l^2$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Dalla conclusione 4) e dal fatto che non possono esistere punti di σ che non appartengono a rette di σ, si conchiude, data l'arbitrarietà della scelta del piano σ, che il numero di punti distinti di un piano è lo stesso per tutti i piani di $\mathcal{E}^3$ ed è finito se e solo l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito; in particolare, per il Corollario 1.4.2 ed il Teorema 1.B.1, si ha che il numero di punti distinti di un piano è pari al prodotto del numero di rette distinte del piano appartenenti ad una direzione per il numero dei punti distinti di una retta, cioè:

5) il numero di punti distinti di un piano è pari a $l \cdot l = l^2$ ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

La seconda parte della dimostrazione consiste, come detto, nel far vedere che il numero di piani distinti di $\mathcal{E}^3$ e finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito. A questo scopo (con riferimento alla figura 27), sia P un punto a scelta di $\mathcal{E}^3$ e σ un piano non passante per P; l'esistenza in $\mathcal{E}^3$ di almeno un punto P ed un piano σ siffatti è garantita dall'assioma E4. I piani distinti passanti per il punto P e non paralleli ad piano σ, per il Teorema 1.5.1, incidono il piano σ secondo (in forza del Corollario 1.3.3) delle rette le quali, per la Proposizione 1.2.3, sono distinte; dunque esiste un'applicazione inietiva tra i i piani passanti per P, non

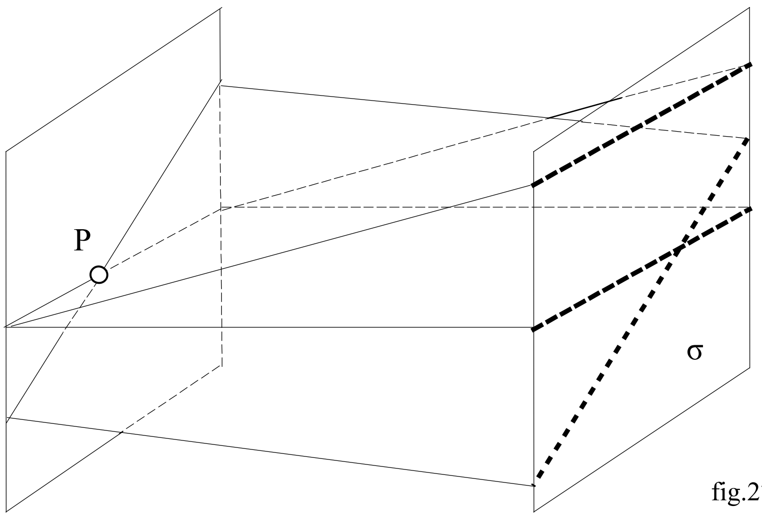


fig.27

paralleli a σ, e le rette di σ. Viceversa, sempre la Proposizione 1.2.3 assicura l'esistenza di piani distinti, uno per ogni retta di σ, non paralleli a σ; dunque esiste anche un'applicazione iniettiva tra le rette di σ e i piani passanti per P non paralleli a σ. L'esistenza di due iniezioni tra i suddetti insiemi implica l'e-sistenza di una biiezione [(14)] tra gli stessi insiemi, ne consegue che il numero di piani distinti passanti per P non paralleli a σ è pari al numero delle rette distinte di σ, e quindi, dalla conclusione 4), dimostrata nella prima parte del teorema, ne consegue che il numero di piani distinti passanti per P non paralleli a σ è pari a $l^2 + l$ $(= l^2$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito. Inoltre (Teorema 1.5.2) esiste un sol piano passante per P e parallelo ad σ, e siccome, per il Teorema 1.5.1, i piani di $\mathcal{E}^3$ o sono paralleli a σ o sono incidenti con σ, si può concludere senza eccezioni, data l'arbitrarietà del piano σ e del suo punto P, che;

6) il numero di piani distinti passanti per un punto è pari a $l^2 + l + 1$ ($= l^2$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine *l* di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Consideriamo adesso l'insieme delle giaciture di $\mathcal{E}^3$. La definizione di giacitura ed il Corollario 1.5.2 assicurano l'esistenza di piani distinti passanti per un punto P arbitrario di $\mathcal{E}^3$, un piano per ogni giacitura di $\mathcal{E}^3$; esiste, cioè, un'applicazione iniettiva tra le giaciture di $\mathcal{E}^3$ ed il piani di $\mathcal{E}^3$ passanti per P. Viceversa, la definizione di giacitura ed il Teorema 1.5.1, assicurano l'esistenza di giaciture distinte di $\mathcal{E}^3$, una per ogni piano passante per P; esiste, cioè, un'applicazione iniettiva tra il piani passanti per P e le giaciture di $\mathcal{E}^3$. L'esistenza di due iniezioni tra i suddetti insiemi implica l'esistenza di una biiezione (14) tra gli stessi insiemi, ne consegue che il numero, finito o infinito, delle giaciture distinte di $\mathcal{E}^3$ è pari a quello dei piani distinti passanti per P. Tenendo presente la conclusione 6) dimostrata in precedenza, data l'arbitrarietà del punto P, possiamo anche dire:

7) il numero di giaciture distinte di $\mathcal{E}^3$ è pari a $l^2 + l + 1$ ($= l^2$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine *l* di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Infine, si ha che il numero di piani distinti aventi la stessa giacitura è lo stesso per ogni giacitura di $\mathcal{E}^3$ ed è finito se e solo se l'ordine *l* di $\mathcal{E}^3$ è finito. Per dimostrare quest'ultima affermazione consideriamo (con riferimento alla figura 28) due giaciture arbitrarie distinte $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ di $\mathcal{E}^3$; l' esistenza di almeno due

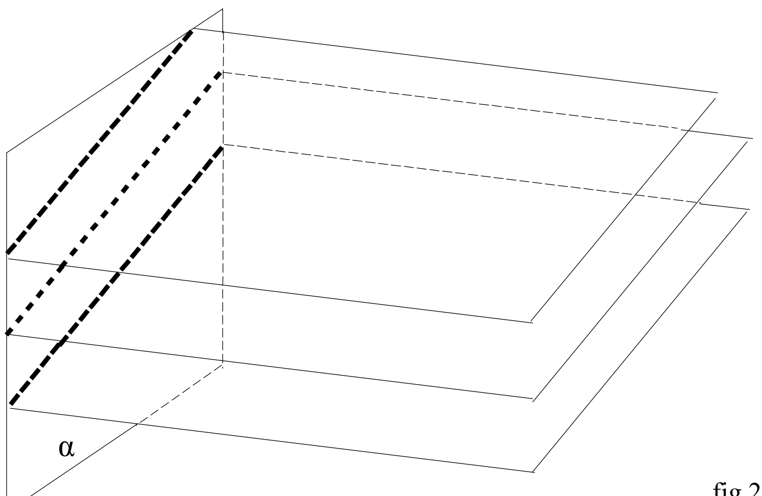


fig.28

piani non paralleli, e quindi di almeno una coppia di giaciture distinte di $\mathcal{E}^3$, è garantita dal Corollario 1.2.3. Sia α un piano di giacitura $\mathcal{G}$, $\mathcal{D}$ la direzione individuata, in forza del Corollario 1.6.1, dalle giaciture distinte $\mathcal{G}$ ed $\mathcal{H}$, consideriamo le rette di α di direzione $\mathcal{D}$; per ognuna di tali rette, in forza della Proposizione 1.6.3, passa un solo piano σ di giacitura $\mathcal{H}$; inoltre si ha che per rette distinte di α di direzione $\mathcal{D}$ passano piani distinti di giacitura $\mathcal{H}$, infatti, se così non fosse, se cioè esistesse un piano β di giacitura $\mathcal{H}$ passante per due rette distinte di α di direzione $\mathcal{D}$ allora il piano *a*, per la Proposizione 1.4.2, coinciderebbe con β, e cioè il piano α, appartenente alla giacitura $\mathcal{G}$, appartiene anche alla giacitura $\mathcal{H}$ distinta da $\mathcal{G}$, e questo è contro il fatto che le giaciture, essendo classi di equivalenza, non hanno elementi in comune. In definitiva si è dimostrata l'esistenza di una applicazione iniettiva tra le rette di direzione $\mathcal{D}$ del piano α di giacitura $\mathcal{G}$ e i piani di giacitura $\mathcal{H}$ diversa da $\mathcal{G}$. Viceversa, ogni piano di giacitura $\mathcal{H}$ passa per una retta di direzione $\mathcal{D}$ del piano α di giacitura $\mathcal{G}$ diversa da $\mathcal{H}$; infatti i piani distinti di giacitura $\mathcal{H}$, tutti paralleli tra di loro, non sono paralleli al piano α sennò il piano α apparterrebbe a due classi di equivalenza distinte; orbene, per la proposizione 1.5.2, i piani distinti di giacitura $\mathcal{H}$ incidono il piano α secondo rette parallele le quali, per come e stata definita la direzione $\mathcal{D}$, appartengono alla direzione $\mathcal{D}$ e sono (ovviamente) distinte. Si è così dimostrata anche l'esistenza di un'applicazione iniettiva tra i piani di giacitura $\mathcal{H}$ e le rette di direzione $\mathcal{D}$ del piano α di giacitura $\mathcal{G}$ diversa da $\mathcal{H}$. Al solito, l'esistenza di due iniezioni tra i suddetti insiemi implica l'esistenza di una biiezione [14] tra gli stessi insiemi, ne consegue che il numero di piani distinti di giacitura $\mathcal{H}$ è pari al numero delle rette distinte di direzione $\mathcal{D}$ del piano α di giacitura $\mathcal{G}$ diversa da $\mathcal{H}$, e data l'arbitrarietà della giacitura $\mathcal{G}$, possiamo affermare che il numero di piani distinti appartenenti ad una data giacitura è lo stesso per ogni giacitura ed è uguale al numero delle rette distinte di direzione $\mathcal{D}$ appartenenti ad un piano di $\mathcal{E}^3$, e quindi, per la Conclusione 2) dimostrata nella prima parte del teorema, ne consegue che:

8) il numero di piani distinti appartenenti ad una giacitura è pari a *l* ed è finito se e solo se l'ordine *l* di $\mathcal{E}^3$ è finito;

Inoltre, siccome ogni piano di $\mathcal{E}^3$ appartiene a una sola giacitura, si ha che:

9) il numero di piani distinti è pari a $l \cdot (l^2 + l + 1) = l^3 + l^2 + l$ ($= l^3$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine *l* di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Dalla conclusione 9) e dal fatto che non esistono punti di $\mathcal{E}^3$ che non appartengono a piani, si conchiude che il numero di punti distinti di $\mathcal{E}^3$ è finito se e solo l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito, in particolare, per il Corollario 1.5.6 ed il Teorema 1.B.1, si ha che il numero di punti distinti di $\mathcal{E}^3$ è pari al numero di piani distinti di una giacitura per il numero di punti distinti di un piano, ovvero:

10) il numero di punti distinti di $\mathcal{E}^3$ è pari a $l \cdot l^2 = l^3$ ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Fine della dimostrazione. ▪

Si noti che per pervenire alla tesi del Teorema 1.B.2 (che coincide con la Conclusione 10), con questa lunga dimostrazione, si sono provate molte altre proprietà circa il numero di enti che compongono lo spazio $\mathcal{E}^3$; manca però (per completezza) la determinazione del numero di rette distinte di $\mathcal{E}^3$. Per questo vale il:

Teorema 1.B.3 (*)

Il numero di rette distinte di $\mathcal{E}^3$ è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

DIMOSTRAZIONE

Sia (con riferimento alla figura 29) P un punto a scelta di $\mathcal{E}^3$ e σ un piano non passante per P: l'esistenza in $\mathcal{E}^3$ di almeno un punto P ed un piano σ siffatti è garantita dall'assioma E4; il Teorema 1.5.2 garantisce, per contro, l'esistenza

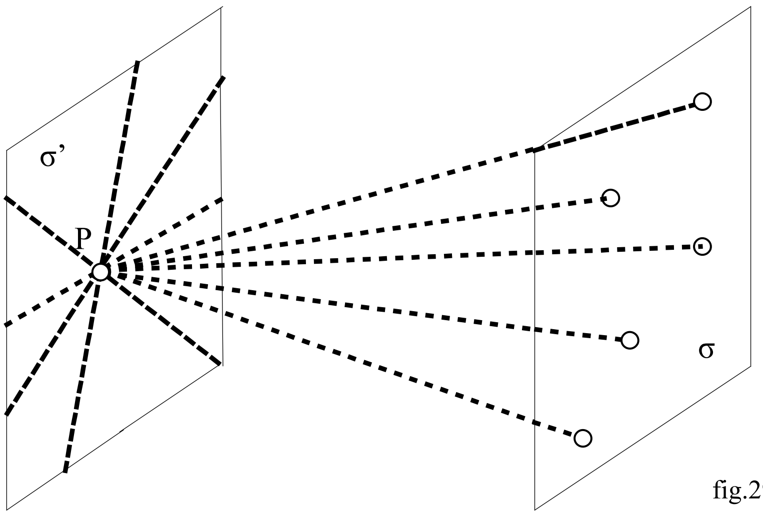


fig.29

del piano σ' parallelo a σ e passante per il punto P. L'assioma E1 primo comma assicura l'esistenza in $\mathcal{E}^3$ di rette distinte, una per ogni punto di σ, tutte non appartenenti al piano σ' e passanti per il punto P. Abbiamo così dimostrato l'esistenza di un'applicazione iniettiva tra i punti del piano σ e le rette di $\mathcal{E}^3$ non appartenenti al piano σ' e passanti per P. Viceversa ogni retta distinta di $\mathcal{E}^3$ non appartenenti al piano σ' e passante per P, non essendo parallele a σ', e quindi (Proposizione 1.6.2) nemmeno a σ, per il Teorema 1.6.1, incide il piano σ in punti che per l'assioma E1 primo comma sono punti distinti di σ. Abbiamo, dunque, dimostrato anche l'esistenza di un'applicazione iniettiva tra le rette di $\mathcal{E}^3$ non appartenenti al piano σ' e passante per P e i punti del piano σ. L'esistenza di due iniezioni tra i suddetti insiemi implica l'esistenza di una biiezione (14) tra gli stessi insiemi, ne consegue che il numero di rette distinte di $\mathcal{E}^3$ non appartenenti al piano σ' e passante per P è pari al numero dei punti distinti di σ', cioè, in forza dalla conclusione 5) del precedente teorema, è pari a l^2 ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito. Osserviamo adesso che ogni retta di $\mathcal{E}^3$ passante per il punto P o appartiene al piano σ' oppure non vi appartiene, ne consegue che il numero di rette distinte di $\mathcal{E}^3$ passanti per P è pari alla somma del numero delle rette distinte appartenenti al piano σ' e passanti per il punto P e del numero di rette distinte non appartenenti al piano σ' e passanti per P, cioè, in forza della conclusione 1) del teorema precedente, si ha:

11) il numero di rette distinte di $\mathcal{E}^3$ passanti per un punto è pari a $l^2 + l + 1$ $(= l^2$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Consideriamo adesso l'insieme delle direzioni di $\mathcal{E}^3$. La definizione di direzione ed il Corollario 1.4.2 assicurano l'esistenza di rette distinte di $\mathcal{E}^3$ passanti per P, una per ogni direzione di $\mathcal{E}^3$; esiste, cioè, un'applicazione iniettiva tra le direzioni di $\mathcal{E}^3$ e le rette di $\mathcal{E}^3$ passanti per P. Viceversa, la definizione di direzione ed il Teorema 1.4.1, assicurano l'esistenza di direzioni distinte di $\mathcal{E}^3$, una per ogni retta di $\mathcal{E}^3$ passante per P; esiste, cioè, un'applicazione iniettiva tra le rette di $\mathcal{E}^3$ passanti per P e le direzioni di $\mathcal{E}^3$. L'esistenza di due iniezioni tra i suddetti insiemi implica l'esistenza di una biiezione (14) tra gli stessi insiemi, ne consegue che il numero, finito o infinito, delle direzioni distinte di $\mathcal{E}^3$ è pari a quello delle rette distinte di $\mathcal{E}^3$ passanti per P, e data tenendo presente la conclusione 11) dimostrata in precedenza, possiamo anche dire:

12) il numero di direzioni distinte di $\mathcal{E}^3$ è pari a $l^2 + l + 1$ $(= l^2$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito;

Infine, si ha che il numero di rette distinte di $\mathcal{E}^3$ aventi la stessa direzione è lo stesso per ogni direzione di $\mathcal{E}^3$ ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Per dimostrare quest'ultima affermazione consideriamo (con riferimento alla figura 30) una direzione $\mathcal{A}$ ed una giacitura $\mathcal{G}$ di $\mathcal{E}^3$ tali che la direzione $\mathcal{A}$ non appartiene alla giacitura $\mathcal{G}$, l'esistenza di almeno una retta e di una piano non paralleli in $\mathcal{E}^3$, e quindi di almeno una direzione e di una giacitura siffatte, è garantita al dagli Assiomi E4 ed E1 primo comma. Sia σ un piano di giacitura $\mathcal{G}$, per ogni suo punto P, in forza del Corollario 1.4.2, passa una sola retta *a* di $\mathcal{E}^3$ di direzione $\mathcal{A}$, inoltre per punti distinti di σ passano rette distinte di direzione $\mathcal{A}$, perché se cosi non fosse, detto Q un altro punto di σ distinto da P per cui passa la retta *a*, per il Lemma 1.2.1, la retta *a* apparterrebbe al piano σ contro la nostra ipotesi; di fatto si è dimostrata l'esistenza di un'applicazione iniettiva tra

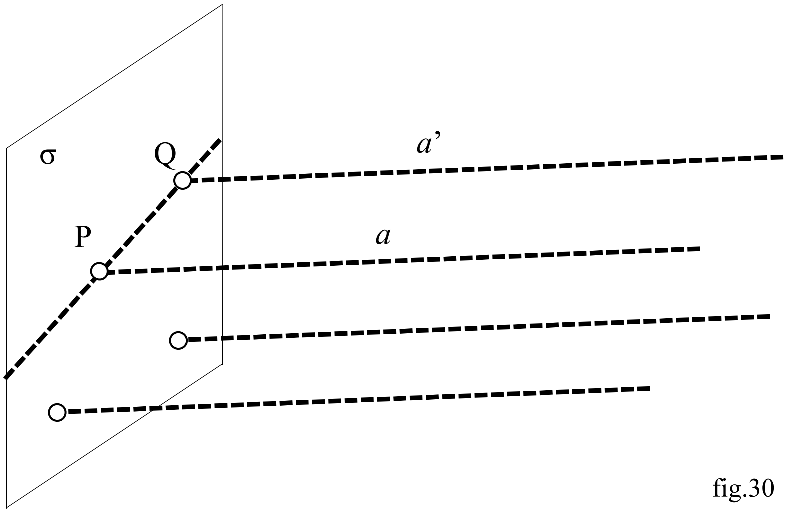


fig.30

i punti del piano σ e le rette di $\mathcal{E}^3$ di direzione $\mathcal{A}$. Viceversa, ogni retta distinta di $\mathcal{E}^3$ di direzione $\mathcal{A}$, essendo per ipotesi la direzione $\mathcal{A}$ non appartenente alla giacitura $\mathcal{G}$ di σ, e quindi le rette di direzione $\mathcal{A}$ non parallele al piano σ, per il Teorema 1.6.1, incidono il piano σ, inoltre rette distinte di direzione $\mathcal{A}$ passano per punti distinti del piano σ, perché se così non fosse, detta *a*' un'altra retta di direzione $\mathcal{A}$ distinta dalla retta *a* e passante anch'essa per uno stesso punto P del piano σ, *a* ed *a*' risulterebbero incidenti ovvero, per il Teorema 1.4.1, non parallele, contro l'ipotesi che la retta *a*' appartiene alla direzione $\mathcal{A}$; di fatto si è dimostrata l'esistenza di un'applicazione iniettiva tra le rette di $\mathcal{E}^3$ di direzione $\mathcal{A}$ ed i punti del piano σ. L'esistenza di due iniezioni tra i suddetti insiemi implica l'esistenza di una biiezione [(14)] tra gli stessi insiemi, ne consegue, considerando l'arbitrarietà della direzione $\mathcal{A}$, che il numero, finito o infinito, di rette distinte di $\mathcal{E}^3$ appartenenti ad una stessa direzione è indipendente dalla direzione ed è pari al numero dei punti distinti di un piano di $\mathcal{E}^3$. Ovvero, tenendo presente la conclusione 5) del teorema precedente:

13) il numero di rette distinte di $\mathcal{E}^3$ appartenenti ad una direzione è pari a l^2 ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito;

Siccome ogni retta di $\mathcal{E}^3$ appartiene a una sola direzione, ne consegue che, ricordando anche la Conclusione 12):

14) il numero di rette distinte di $\mathcal{E}^3$ è pari a $l^2 \cdot (l^2 + l + 1) = l^4 + l^3 + l^2$ ($= l^4$ se l è infinito) ed è finito se e solo se l'ordine l di $\mathcal{E}^3$ è finito.

Fine della dimostrazione. ▪

N O T A

(13) – Ricordiamo, brevemente, l'aritmetica essenziale dei numeri cardinali transfiniti. Se λ è un numero cardinale infinito ed n e m due cardinali finiti (cioè due numeri naturali), risulta: $\lambda+n = \lambda$; $\lambda^{n+1}+\lambda^n = \lambda^{n+1}$; $\lambda^n \lambda^m = \lambda^{n+m}$. Inoltre valgono (come nel caso di numeri naturali) le proprietà commutativa ed associativa di somma e prodotto, e la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

(14) – Dati due insiemi di natura arbitraria S e T, in base alle proprietà delle applicazioni, occorre costruire o dimostrare l'esistenza di una biiezione a partire da una iniezione f di S in T ed una iniezione g di T in S. Questo è il contenuto del Teorema di Cantor, Schröder, Bernstein, che è uno dei primi e più importanti risultati della Teoria degli Insiemi, già trattato in questo complemento.

INTERRUZIONE !

Per richiedere, GRATUITAMENTE, il volume completo contattare l'autore all'indirizzo E-Mail: mailto:angelo.de.luna@virgilio.it comunicando le proprie coordinate di posta elettronica e, facoltativamente, l'URL del proprio sito.

Campagna (SA), 20 marzo 2009 Angelo De Luna